

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨ નો.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગુજરાતી કૅપીરાઈટ વિભાગ]

અનુક્રમાંક. 56-52 વર્ષ

પુસ્તકનું નામ. નવા ભૂમિતિ-૨

વિષય મેર : ૨૪૩ : ૫૬

Department of Public Instruction, Bombay.

NEW GEOMETRY

PART II.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,
First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B.A.,
Teacher, Training College for Men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B.A., S.T.C.,
Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

1ST EDITION.

1000 COPIES.

PUBLISHED BY

Chimanlal Chunilal & Co.,

Proprietors,

Chimanlal Maneklal

AND

Chunilal Khushaldas,

AHMEDABAD.

All rights reserved.

1916.

PRICE 1-2-6.

Printed at

THE DIAMOND JUBILEE PRINTING PRESS

Salapose Road, AHMEDABAD,
by Devidas Chhaganlal Parikh.

મુંબઈ ઇસ્ટાકાનું સરકારી કેળવણીખાતું.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ રજો.

મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એલ.,
ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,

અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,
શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફોર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજ સપ્તે, બી. એ., એસ્. ટી. સી.,

અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ.,
એસ્. ટી. સી.,

શિક્ષક, પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ ૧લી.

પ્રત-૧૦૦૦.

સને ૧૯૧૬.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

ચીમનલાલ, ચુનીલાલની કંપની.

માલીક-ચીમનલાલ માણેકલાલ

અને

ચુનીલાલ ખુશાલદાસ

આસ્તોડીઆ રોડ-અમદાવાદ.

સરકારે સર્વ હક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

કિં. રૂ. ૧-૨-૬.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ પ્રેશાલય
અમદાવાદ
ગુજરાતી ગ્રંથોદ્ધાર-સંગ્રહ

૬૯૬૨

અમદાવાદ—સલાપોસ રોડ,
ધિ “ડાયમંડ ન્યુઝિલિ” પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
પરીખ દેવીદાસ છગનલાલે છાપ્યું

પ્રસ્તાવના.

ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં ‘નવી ભૂમિતિ’* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડફ્રે અને સિડ્સ,ખર્નાર્ડ અને આઇલ્ડ, પિયરપોઇન્ટ, એગર વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ધણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ધણા આભારી છે. ગ્રંથકર્તા.

સૂચના—નવી ભૂમિતિ ભા. ૧લામાં ‘શિક્ષકોને સૂચના’, ‘ઉપોદ્ધાત’, અને ‘પરિશિષ્ટ ભ’માં આપેલી માહિતી આ ખીજા ભાગનો ઉપયોગ કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવી.

* **નવી ભૂમિતિ**—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિતશાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ધણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

અનુક્રમણિકા.



	પૃષ્ઠ.
અંક ૧. (ક્ષેત્રફળ)	૧—૨૬
પ્રકરણ ૧. (પ્રાયોગિક ભાગ)... ..	૧—૧૦
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૨૬—૩૦)... ..	૧૦—૨૩
પ્રકરણ ૩. (કૃત્યો ૧૪—૧૫)... ..	૨૪—૨૬
અંક ૨. (વર્તુળ)	૨૬—૮૨
પ્રકરણ ૧. (પ્રાયોગિક ભાગ)... ..	૨૬—૪૮
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૩૧—૪૩)... ..	૪૮—૮૪
પ્રકરણ ૩. (કૃત્યો ૧૬—૧૯)... ..	૮૫—૮૨
અંક ૩.	૮૩—૧૬૫
પ્રકરણ ૧. (પ્રમેય અ-હ અને ૪૪—૫૩)... ..	૮૩—૧૩૫
પ્રકરણ ૨. (પ્રમેય ૫૪—૫૫)... ..	૧૩૬—૧૪૩
પ્રકરણ ૩. (કૃત્ય ૨૦—૩૨)... ..	૧૪૪—૧૬૫
પરિશિષ્ટ અ.	૧૬૫—૧૬૮
પરિશિષ્ટ બ. (પરચુરણ પ્રશ્નો)	૧૭૦—૧૮૨



શુદ્ધ પત્ર.

પૃષ્ઠ.	લીટી.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૬	(આકૃતિમાં ૬ પાસેના ત્રિકોણમાં ૮ અક્ષર મૂકવો.)		
૯	૧૩	ધણો	ગણો
„	૨૪	પણ લંબ	લંબ પણ
૫૪	૧	મકની	મંકની
„	૬	મડની	મંડની
„	૭	મઢ	મંઢ
૬૦	૧૦	ન્યાઓના	ન્યાઓનાં
૬૫	૪	બાળુઓના	બાળુઓનાં
૬૮	૬	છેડાના	છેડાનાં
૭૦	૧૫	પ્ર૯	પ્ર૦
૮૬	૧૬	ના	રચના-
૯૦	૧૪	બંદુઓમાં	બિંદુઓમાં
૯૮	૨૬	અક ^૨	અક ^૨ .
૧૦૫	૫	અર્ધ	અર્ધ
„	૧૧	ચોરસોમાંના	ચોરસોમાંનાં
„	૧૨	પરનાં	પરના
૧૧૯	૧૯	બાળુઓના	બાળુઓનાં
૧૨૭	૧૦	અલકટ	અલકઢ
„	૨૩	લીટીનાં	લીટીના
૧૩૯	૨૩	પગઈ	∠ પગઈ
૧૪૧	૫	ન્યાઓના	ન્યાઓનાં
„	૧૪	ત્રિકોણના	ત્રિકોણનાં
૧૫૩	૮	મઢઈ	∠ મઢઈ
૧૫૯	૯	ડંમઈ	∠ ડંમઈ
„	૧૧	કમડ	∠ કમડ
૧૬૫	(આકૃતિની અંદર પડતો ગ નહિ લેઈએ.)		
૧૯૧	૧૧	કાટખુણાનો	કાટખુણુ ચોખુણુનો

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨.

ખંડ ૧.



પ્રકરણ ૧.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

ક્ષેત્રફળ.

અમુક જગાનું ક્ષેત્રફળ એટલે તે જગાની સપાટીનું પરિ-
માણ. એક પૈસાથી જેટલી જગા ઢંકાય તેના કરતાં બમણી
જગા બે પૈસાથી ઢંકાય; માટે બે પૈસાની એક બાજુનું
ક્ષેત્રફળ એક પૈસાની તેવીજ બાજુના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું,
અને ત્રણ પૈસાની એક બાજુનું એક પૈસાની એક બાજુ
કરતાં ત્રણું.....૯૦

૧" લંબાઈની બે લીટીઓ લો, અને તેના પર ચોરસો
કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકો, અને તેઓ એક બીજા
પર બરાબર આવી રહે છે કે નહિ તે જુઓ.

૨", ૨.૪".....લંબાઈની બન્ને લીટીઓ લઈ તેના પર
ચોરસો કાઢો, અને ઉપલેખ પ્રયોગ કરો.

આ પ્રયોગો પરથી તમારા સમજવામાં શું આવે છે ?

“જો સરખી લંબાઈની બે લીટીઓ પર ચોરસો દોરવામાં
આવે, તો તે એક બીજા પર બરાબર બેસતા આવે છે; એટલે
એમ માલમ પડે છે કે સરખા પાયા પર દોરેલા બે
ચોરસો સરખી જગા રોકે છે.” હવે સરખા પાયા પરના

સઘળા ચોરસો સરખા હોય છે, અને ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની બાજુની લંબાઈના પ્રમાણમાં નિયમિત રીતે ઓછુંવતું થાય છે, તેથી ક્ષેત્રફળ માપવામાં આ આકૃતિ બીજી આકૃતિઓ કરતાં વધારે અનુકૂળ પડે છે. આ કારણથી ક્ષેત્રફળ માપવામાં આ એકમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

જ્યારે કોઈ ચોરસની બાજુ ૧" હોય છે, ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ એક ચોરસ ઇંચ છે એમ કહેવાય છે. જ્યારે બાજુ એક ફુટ હોય છે, ત્યારે ક્ષેત્રફળ એક ચોરસ ફુટ કહેવાય છે. જ્યારે બાજુ એક વાર હોય છે, ત્યારે ક્ષેત્રફળ એક ચોરસ વાર કહેવાય છે.....૪૦

૨" લંબાઈની અથવા લીટી પર એક અથવા વધારે ચોરસ દોરો. અથવા, અથવા પર એક એક ઇંચને અંતરે નિશાની કરો. આ નિશાનીઓમાંથી ચોરસની બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરો. ચોરસના કેટલા ભાગ થયા? દરેક ભાગમાં કેટલા ચોરસ ઇંચ છે?

૩", ૪", ૫".....૪૦ લંબાઈની લીટીઓ લઈ ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

જ્યારે ચોરસની બાજુ ૧" હોય છે, ત્યારે ચોરસ એક ચોરસ ઇંચનો હોય છે; જ્યારે ૨" હોય છે, ત્યારે ચોરસ ૪ ચોરસ ઇંચનો હોય છે.....૪૦. આ પરથી ચોરસનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માટે આપણે કયો નિયમ ઉપજાવી શકીએ?

“ ચોરસની એક બાજુનો વર્ગ કરવો. ”

લંબચોરસ અથવા કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ.

ચાર ઇંચ લંબાઈની એક અથવા લીટી લો. તેના અ છેડા-માંથી એક લંબ દોરો, અને તેમાંથી ૩ ઇંચ જેટલો એક અથવા ભાગ કાપી કાઢો. પછી એ બે લીટીને સમાંતર લીટીઓ દોરો, અને લંબચોરસ પૂરો કરો. અથવા અને અથવા પર ઇંચ ઇંચને અંતરે નિશાની કરો, અને તે નિશાનીઓમાંથી લંબ-

ચોરસની બાજુઓ સુધી સમાન્તર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓથી લંબચોરસના કેટલા ભાગ થાય છે? “૧૨.” દરેક ભાગમાં કેટકેટલા ચોરસ ઇંચ છે? “એક ચોરસ ઇંચ.”

જ્યારે લંબચોરસની ઉંચાઈ ૩ ઇંચ હોય, ત્યારે ભાગ પડવાથી થએલી દરેક ઉભી હારમાં કેટલા ચોરસ ઇંચ હોય? “ત્રણ.” જ્યારે ઉંચાઈ ૪ ઇંચ હોય, ત્યારે દરેક ઉભી હારમાં કેટલા ચોરસ ઇંચ હોય? “ચાર.”

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૪ ઇંચ હોય, ત્યારે ચોરસોની ઉભી હારો કેટલી થાય? “ચાર.” જ્યારે લંબાઈ ૫ ઇંચ હોય, ત્યારે કેટલી થાય? “પાંચ.”

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ (ઉંચાઈ) અનુક્રમે ૪" અને ૩" હોય, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ચોરસ હોય એવી ૪ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૨ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૫" અને પહોળાઈ ૩" હોય છે, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ત્રણ ચોરસો હોય એવી પાંચ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૫ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૬" અને પહોળાઈ ૩" હોય, ત્યારે દરેકમાં ત્રણ ત્રણ ચોરસો હોય એવી ૬ હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૮ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

જ્યારે લંબચોરસની લંબાઈ ૪" અને પહોળાઈ પણ ૪" હોય, ત્યારે દરેકમાં ચાર ચાર ચોરસો હોય એવી ચાર હારો બને છે, અને ક્ષેત્રફળ ૧૬ ચોરસ ઇંચ થાય છે.

.....૯૦

આ ઉપરથી લંબાઈ અને પહોળાઈ (અથવા ઉંચાઈ)ની મદદથી લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા માટે કયો નિયમ આપણે ઉપજાવી શકીએ છીએ? “લંબાઈનો ઉંચાઈ સાથે ગુણાકાર કરવો.” આ નિયમ ચોરસને લાગુ પડે ખરો? હા.

આ પરથી કોઈ પણ કાટખુણુ ચોખુણુનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા

માટે કયો નિયમ નીકળે છે ? “લંબાઈ અને ઉંચાઈના ગુણાકાર કરવો.”

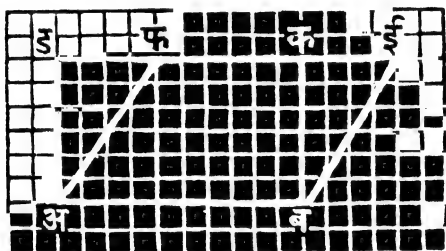
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ.

જેની ઉંચાઈ* છ ધર સુધીની હોય અને જેની લંબાઈ ગમે તેટલાં પૂર્ણ ધર સુધીની હોય એવો એક સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ એક ચોરસ દોરેલા કાગળ પર કાઢો. આ આકૃતિના પાયા પર તેટલીજ ઉંચાઈનો એક લંબચોરસ દોરો.

પહેલો પ્રકાર:—

(પહેલી રીત).

ધારો કે ચોખ્ખાની ડાબી તરફની ઉભી (તિર્યક્) બાજુ લંબચોરસની અંદર પડે છે.



ઉપરની આકૃતિમાં જુઓ છો તે પ્રમાણે સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસનો કેટલોક ભાગ સાધારણ છે. લંબચોરસનો જે ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણમાં આવી જતો નથી તે ભાગને (એટલે \triangle અડફને) લંબચોરસની બહાર નીકળેલા સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ભાગ (એટલે \triangle ચકઈ) સાથે સરખાવો. અને બરાબર છે ? આ દરેક ભાગમાં કેટ-કેટલાં ચોરસ ધરો આવેલાં છે તે જુઓ. દરેકમાં કેટલાં ધર પુરેપુરાં છે ને કેટલાં અપૂર્ણ છે ? અને ભાગમાંનાં ધરો

* સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ઉપલી બાજુમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તે ચોખ્ખાની ઉંચાઈ કહે છે.

સરખાવી જોવાથી તમને શું માલમ પડી આવે છે? “બંને ભાગમાં ઘરોની સંખ્યા સરખી છે.” આ ઉપરથી બંને ત્રિકોણોના સંબંધમાં તમે શું શીખો છો? “તે સરખા છે.”

અહીં $\triangle =$ ચર્કા \triangle . દરેકમાં અવકાશ ઉમેરો.

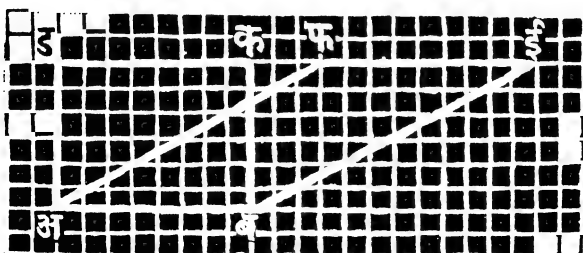
\therefore અવકાશ = અર્ધચંદ્ર.

આ ઉપરથી એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં શું અનુમાન કરો છો? “એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય છે.”

(ખીજી રીત).

અવકાશ ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસ બંનેમાં સાધારણ છે. હવે લંબચોરસની બહાર નીકળેલા સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ભાગ (ચર્કા)ને કાપી કાઢો, અને તેને અહીં ત્રિકોણ પર ગોઠવો. તમને શું માલમ પડે છે? આ પરથી એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં કયા સામાન્ય નિયમ પર આવો છો?

ખીજો પ્રકાર:—ધારો કે સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ડાબી બાજુ લંબચોરસની જમણી બાજુની બહાર લંબાય છે.



(પહેલી રીત).

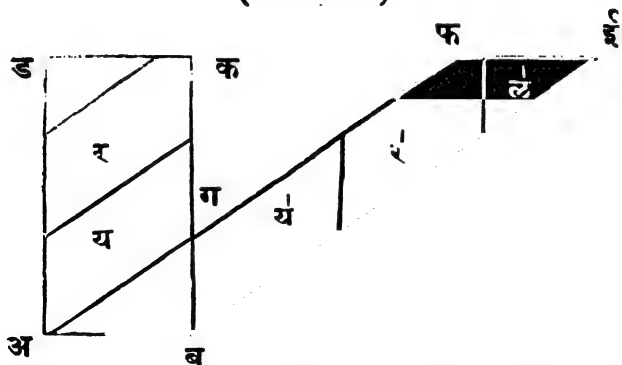
(ધારો કે અબકડ લંબચોરસ છે, અને અબઈફ સમ-પ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ છે).

અડફ ત્રિકોણનાં ચોરસ ધરો ગણો. બકઈ ત્રિકોણનાં પણ ગણો. એ પરથી આ બે ત્રિકોણોના સંબંધમાં શું જાણવામાં આવે છે ? “ Δ અડફ = Δ બકઈ ”.

હવે, અબઈડ આકૃતિમાંથી એક વખત બકઈ Δ અને એક વખત અડફ Δ કાઢી લો. બાકી કયા ભાગ રહે છે ? “ અબકડ અને અબઈફ. ” આ પરથી અબકડ અને અબઈફનાં ક્ષેત્રફળ કયા પ્રમાણમાં છે તે બાબત તમારા સમજવામાં શું આવે છે ?

અબકડ અને અબઈફમાંનાં ધરો ગણો અને તેની સરખામણી કરો. શું જાણવામાં આવે છે ?

(બીજી રીત).



ધારો કે અફ બાજુ બકને ગ બિંદુમાં છેદે છે. બગ જોડા અંતરે ગક અને અડ પર એક પછી એક નિશાની કરો. આ નિશાનીઓનાં બિંદુઓને એવી રીતે સાંધો કે જોડનારી લીટીઓ અગતે સમાન્તર થાય. ધારો કે લંબ-ચોરસના ચાર ભાગ પડે છે. આમાંનો ચ ભાગ સમપ્રતિ-

ભુજ ચતુષ્કોણના ચ' ભાગ પર બરાબર બેસતો આવી રહેશે; કારણ કે બંને ભાગોના આકાર, લંબાઈ, તથા પહોળાઈ સરખાં છે. ચ ભાગ કાપી ચ' ભાગ પર મૂકી જોવાથી એ બાબતની ખાત્રી થશે. એજ પ્રમાણે ૨ ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ૨' ભાગ પર બરાબર બેસતો આવી રહે છે. ૯ ભાગ..... ૯ ભાગ પર.....૬૦. આ પ્રમાણે આપણા જોવામાં આવે છે કે લંબચોરસના બધા ભાગ સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના બધા ભાગ પર બરાબર બેસતા આવી રહે છે. (પૃ૦).

સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના બધા ધર્મ સમાન્તરબાહુ ચતુષ્કોણમાં પણ છે, માટે ઉપલા પ્રયોગો પરથી ક્યો સામાન્ય નિયમ આપણે જાણી શકીએ છીએ ?

“ એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમાન્તરબાહુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્ર-ફળ સરખાં હોય છે. ”

ઉપર કહેલી રીત પ્રમાણે સરખી લંબાઈના (સરખા પાયા પરના) અને સરખી ઉંચાઈના લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તે પરથી સરખી લંબાઈ અને સરખી ઉંચાઈવાળા લંબચોરસના અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ વચ્ચે કેવો સંબંધ તમારા જોવામાં આવે છે ?

એ પરથી સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની લંબાઈ અને ઉંચાઈનો તેના ક્ષેત્રફળ સાથે કેવો સંબંધ છે તે વિષે તમારા સમજવામાં શું આવે છે ?

“ (સમપ્રતિભુજ એટલે) સમાન્તરબાહુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરાબર છે. ”

એ પરથી સરખી લંબાઈના (એટલે સરખા પાયા પરના)

અને એકજ (અથવા સરખી) ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ વિષે શું અનુમાન પર આવો છો ?

“સરખા પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે.”

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ.

ચોરસ દોરેલા કાગળ પર એકજ પાયા પર આવેલા અને એકજ ઉંચાઈના એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લો. તેમાં આવેલાં ચોરસ ઘરો ગણો, અને તેમનાં ક્ષેત્રફળ કયા પ્રમાણમાં છે તે જુઓ.

“જો કોઈ ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું હોય છે.”

ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી પાયાના બીજા છેડા તરફની બાજુને સમાંતર એક લીટી દોરો, અને એક બીજી લીટી શિરોબિંદુમાંથી પાયાને સમાંતર દોરો, કે જેથી એક સંપૂર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બને. હવે ઉપર પૂછેલા પ્રશ્નનો જવાબ આપવા પ્રયત્ન કરો.

એક કાગળના કકડામાંથી એક ત્રિકોણ કાપી કાઢો. શિરો-બિંદુ પરથી પાયા પર લંબ પડે એવો (કાગળ વાળીને) વળ પાડો. ત્રિકોણના ખુણાઓને એવી રીતે વાળો કે ત્રણે શિરો-બિંદુઓ લંબને નીચલે છેડે (એટલે જ્યાં લંબ પાયાને છેદે છે ત્યાં) એકઠા થાય. આ પ્રમાણે વાળવાથી ત્રિકોણ કેવો આકાર ધારણ કરે છે ? “કાટખુણુ ચોખુણુનો.” ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ આ કાટખુણુ ચોખુણુના ક્ષેત્રફળ કરતાં કેટલાગણું છે ? “બમણું.” આ કાટખુણુ ચોખુણુનું ક્ષેત્રફળ કેટલું છે ? તેની લંબાઈ ત્રિકોણના પાયાના પ્રમાણમાં કેટલી છે ? “પાયાના

અડધ જેટલી.” તેની ઉંચાઈ ત્રિકોણની ઉંચાઈના પ્રમાણમાં કેટલી છે? “અડધી.”

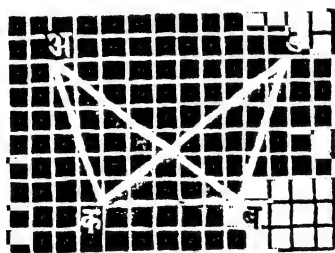
ધારો કે ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ ૫ છે અને ઉંચાઈ ૫ છે. ત્યારે કાટખુણ ચોખુણું ક્ષેત્રફળ કેટલું?

$\frac{5 \times 5}{2} = \frac{5 \times 5}{2}$. હવે આપણે જોયું છે કે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણ ચોખુણા ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે, માટે તે $\frac{5 \times 5}{2}$ હોવું જોઈએ. આ ઉપરથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાઢવા

માટે કયો નિયમ તમે શોધી કાઢો છો?

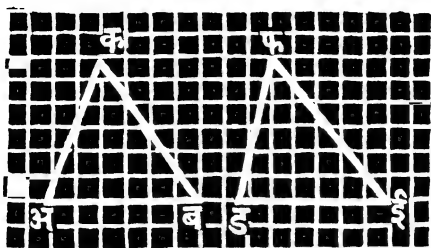
“ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પાયા તથા ઉંચાઈના ગુણાકારના અડધ બરાબર હોય છે.”

એક ચોરસ દોરેલા કાગળ પર એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના અઢક અને ઢબક બે ત્રિકોણો દોરો. બંને માંનાં ઘરો ઘણો, અને તેમનાં ક્ષેત્રફળની સરખામણી કરો. આ પ્રયોગ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સૂઝી આવે છે?



“એકજ પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે.”

સરખા પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના અઢક અને ઢબક બે ત્રિકોણો દોરો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. એ પરથી સરખા પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળના સંબંધમાં શું અનુમાન કરી શકો છો?



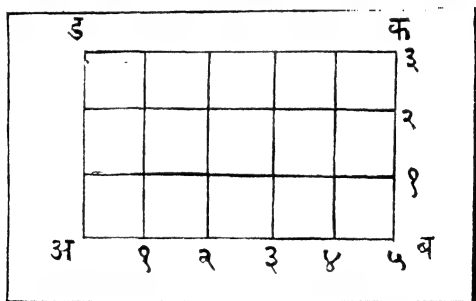
“ સરખા પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય છે. ”

પ્રકરણ ૨.

(પ્રમેય.)

પ્રમેય ૨૬.

કોઈ પણ કાટખુણ ચોખુણું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવકાશ એક કાટખુણ ચોખુણું છે.

સાધ્ય—અવકાશનું ક્ષેત્રફળ = અવકાશ × અવકાશ.

સિદ્ધતા—ધારો કે અવકાશ લીટી ૫ (દાખલા તરીકે ૫)
 ઇંચ લાંબી છે, અને અવકાશ લીટી ૩ (દાખલા તરીકે ૩)
 ઇંચ લાંબી છે.

અવના ઇંચ ઇંચના ભાગ પાડો. એવા ભાગ ક્ષ (૫) પડશે. એ ભાગ જ્યાં પડતા હોય તે બિંદુઓમાંથી ચક્ર ને સમાંતર લીટીઓ કઢને મળતાં સુધી દોરો.

એજ પ્રમાણે ચક્રના ઇંચ ઇંચના ભાગ પાડો. એવા ચ (૩) ભાગ પડશે. એ ભાગ જ્યાં પડતા હોય તે બિંદુઓમાંથી અવને સમાંતર લીટીઓ અઢને મળતાં સુધી દોરો.

અવની લંબાઈ ક્ષ (૫) ઇંચ છે, માટે અક આકૃતિના ક્ષ ઉભા ભાગો અથવા કોઠા પડ્યા.

ચક્રની લંબાઈ ચ (૩) ઇંચ છે, માટે દરેક ઉભા કોઠામાં ચ ભાગો સમાયા છે, અને તે દરેક એક ચોરસ ઇંચ જેટલો છે.

દરેક કોઠામાં ચ ચોરસ ઇંચ છે, અને એવા ક્ષ કોઠા છે; માટે અક આકૃતિમાં ચોરસ ઇંચની કુલ મંખ્યા ક્ષ×ચ છે.

∴ અવકઢ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ=ક્ષ×ચ છે.

પણ ક્ષ=અવ અને ચ=ચક્ર;

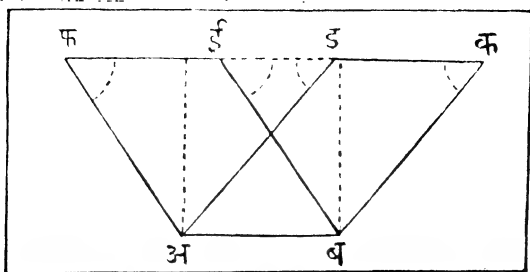
∴ અવકઢ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ = અવ×ચક્ર.

સૂચના—ઇંચને બદલે બીજો કોઈ લંબાઈનો એકમ લઈ એ તોપણ ચાલે. જે લંબાઈ તથા પહોળાઈમાં અપૂર્ણાંક હોય, તો તે અપૂર્ણાંકનો દઢભાજક હોય એવો નાનો એકમ લેવો, એટલે લંબાઈ તથા પહોળાઈના પૂર્ણ એકમ આવી રહેશે. દાખલા તરીકે, જે લંબાઈ $૭\frac{૧}{૨}$ " અને પહોળાઈ $૩\frac{૧}{૨}$ " હોય, તો એકમ $\frac{૧}{૨}$ " લેવો.

પ્રમેય ૨૭.

એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરખાળુ ચતુષ્કોણો સરખા* હોય છે.

* સરખા—પ્રમેય ૨૬થી ૩૦ સુધીમાં અને તે પરના પ્રશ્નોમાં ‘સરખા’ એ શબ્દ જ્યારે આકૃતિઓના સંબંધમાં વપરાય ત્યારે તેનો અર્થ ‘ક્ષેત્રફળમાં સરખા’ એમ સમજવો.



પક્ષ—અવકઢ અને અવર્ફ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો એકજ થાયા અથ ઉપર અને એકજ ઉંચાઈના છે.

સાધ્ય—આ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

સિદ્ધતા— \therefore આ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો એકજ ઉંચાઈના છે,

\therefore \square અવકઢ અને \square અવર્ફ એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચે છે. (પ્ર૦ ૨૩ પ્રશ્ન ૧).

\therefore કફ એક સીધી લીટી છે, અને તે અથને સમાંતર છે.

હવે, \therefore અડ \parallel વક,

$\therefore \angle$ અડફ $= \angle$ વર્ફ. (પ્ર૦ ૬)

\therefore અફ \parallel વર્ફ;

$\therefore \angle$ અફડ $= \angle$ વર્ફક. (પ્ર૦ ૬)

હવે \therefore અફડ અને વર્ફક ત્રિકોણોમાં

\angle અફડ $= \angle$ વર્ફક;

\angle અડફ $= \angle$ વર્ફ;

અફ=વર્ફ;

(પ્ર૦ ૨૨)

$\therefore \triangle$ અફડ $\equiv \triangle$ વર્ફક.

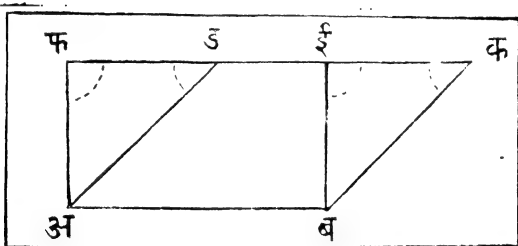
(પ્ર૦ ૧૧)

અવકફ આકૃતિમાંથી એક વખત અફડ અને એક વખત વર્ફક ત્રિકોણુ બાદ કરો.

\therefore બાકી રહેલા \square અવકઢ $= \square$ અવર્ફ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સરખા પાયા પરના અને સરખી ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા હોય છે. (કારણ કે તે એકજ પાયા પર અને તે પાયાની એકજ બાજુએ મૂકી શકાય છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્ર-ફળ પાયા અને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરાબર હોય છે. (૨૭મા પ્રમેય પ્રમાણે, એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને કાટખુણ ચોખુણ બરાબર હોય છે; એ પરથી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ થાય છે). [આકૃતિ જુઓ.]



સૂચના—ઉપલા પ્રમેયની પ્રતિષ્ઠા નીચે પ્રમાણે પણ અપાય છે:—

એકજ પાયા પરના અને એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા હોય છે.

જે આકૃતિઓ એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચે હોય, તે એકજ ઉંચાઈની હોય છે; માટે હવે પછી આવતા ૨૮થી ૩૦ સુધીના પ્રમેયની પ્રતિષ્ઠામાં ‘એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના’ એ શબ્દોને બદલે ‘એકજ ઉંચાઈના’ એ શબ્દો મૂકવામાં આવશે.

૨૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. * આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ૩, ૫, ૬.....
૬૦ સરખા ભાગ કરો. કેટલી રીતે એમ કરી શકાશે ?

૨. અઘકઢ કાટખુણ ચોખુણના અઘ પાયા પર એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે તે કાટખુણ ચોખુણની બરોબર થાય, અને તેની પરિમિતિ આપેલી લંબાઈની થાય.

૩. આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબર એક સમલુજ ચતુષ્કોણ (રૉમ્બસ) દોરો.

૪. એક આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે તેની પાસપાસેની બાજુઓ બે આપેલી સીધી લીટીઓની બરોબર હોય.

૫. આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો કર્ણ આપેલી લંબાઈનો હોય.

૬. આપેલા કાટખુણ ચોખુણ બરોબરનો એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણાની બરોબર હોય.

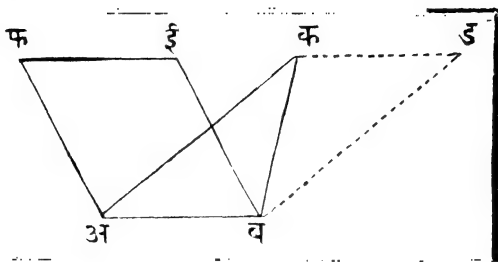
વ્યાખ્યા—કર્ણના કોઈ બિંદુમાંથી પાસપાસેની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી અને બીજી બે બાજુઓને મળતાં સુધી લંબાવેલી લીટીઓ વડે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના જે ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો થાય છે, તેમાંથી જેમાં થઈને કર્ણ જતો હોય તેને ‘ કર્ણની આસપાસના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ’ કહે છે, અને બીજા બેને તેની ‘ પૂર્ણિ ’ કહે છે.

દેવકુળેકૃત યુક્તિલક્.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણની આસપાસના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોની પૂર્ણિઓ એક બીજાની બરોબર હોય છે.

પ્રમેય ૨૮.

ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળથી અર્ધું હોય છે.



પક્ષ—અબક ત્રિકોણ અને અબઈફ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અબ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના છે.

સાધ્ય—અબક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અબઈફ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળનું અર્ધું છે.

રચના—અકને સમાંતર બડ અને અબને સમાંતર કડ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અઈ* અને અડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના છે, (પક્ષ)

\therefore તે બરાબર છે. (પ્ર. ૨૭)

\therefore બક કર્ણ અબક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે, (પ્ર. ૨૨)

\therefore અબક ત્રિકોણ અડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અર્ધા બરાબર છે.

* કોઈ પણ સામસામેના બે ખુલાઓ આગળના અક્ષરો વડે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દર્શાવવાનો ચાલ છે.

પણ અડ $\square =$ અર્ધ \square .

$\therefore \triangle$ અઘક $= \frac{1}{2} \square$ અર્ધ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણ અને સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ સરખા પાયા ઉપર અને એકજ ઉંચાઈના હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અર્ધ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પાયા તથા ઉંચાઈના ગુણાકારના અર્ધ બરાબર હોય છે.

૨૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. સમબળ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના કર્ણોના ગુણાકારના અર્ધ બરાબર હોય છે.

૨. અઘકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની અઘ અને અડ બાણુઓને પ અને ચ બિંદુઓમાં અનુક્રમે દુભાગી છે; તો બતાવી આપો કે અપચ ત્રિકોણ અઘકડના $\frac{1}{2}$ બરાબર છે.

૩. એક આપેલા ત્રિકોણ બરાબરનો એક કાટખુણુ ચોખુણુ દોરો.

૪. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ અઘકડની અઘ અને ઘક બાણુમાં પ અને ચ કોઈ બિંદુઓ છે; તો બતાવો કે કડપ ત્રિકોણ અડચ ત્રિકોણની બરાબર છે.

૫. અઘકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણમાં એક ઓ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે

\triangle ઓઅઘ + \triangle ઓકડ $= \frac{1}{2}$ અઘકડ.

૬. અઘકડ એક સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે, અને $\frac{1}{2}$ એ કડનું મધ્યબિંદુ છે. અર્ધ સાંધો અને બતાવો કે અડર્ધ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના ચતુર્થાંશ બરાબર છે.

૭. અઘકડ ચતુષ્કોણમાં, અઘ એ કડને સમાંતર છે;

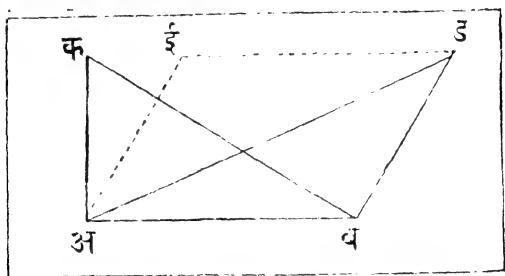
ઈ એ અડનું મધ્યબિંદુ છે; તો ખતાવો કે \triangle બર્ફક = $\frac{1}{2}$ અબકડ.

૮. જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણાની ખરાબર હોય અને જે આપેલા ત્રિકોણની ખરાબર હોય, એવો તેજ ત્રિકોણના પાયા પર એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૯. જે આપેલા ત્રિકોણની ખરાબર હોય અને જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણા જેવડો હોય એવો એક સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણ એક આપેલી લીટી પર દોરો.

પ્રમેય ૨૬.

એકજ પાયા પરના અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણો સરખા હોય છે.



પક્ષ—એકજ પાયા અબ પર અને એકજ ઉંચાઈના અબક અને અબડ ત્રિકોણો છે.

સાધ્ય—તે સરખા છે.

રચના—બડને સમાંતર અઈ અને બજને સમાંતર ડઈ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અબક \triangle અને અબડઈ \square એકજ પાયા પર અને એકજ ઉંચાઈના છે,

\therefore અબક $\triangle = \frac{1}{2}$ અબડઈ \square .

(પ. ૨૮)

વળી કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે, (પ્ર. ૨૨)

∴ અબડ $\triangle = \frac{1}{2}$ અબડઈ \square .

∴ અબક $\triangle =$ અબડ \triangle .

ઉપ૦—સરખા પાયા પરના એકજ ઉંચાઈવાળા ત્રિકોણો સરખા હોય છે.

૨૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. ત્રિકોણની કોઈ પણ મધ્યગા તે ત્રિકોણને દુભાગે છે.

૨. અબકડ ચતુષ્કોણમાં અક કર્ણ બડ કર્ણને દુભાગે છે; તો બતાવો કે અક વડે તે ચતુષ્કોણના બે સરખા ત્રિકોણો થાય છે.

૩. અબકડ ચતુષ્કોણના અક કર્ણનું મધ્યબિંદુ \bar{I} છે, તો બતાવો કે અબઈડ=કબઈડ.

૪. અબક ત્રિકોણની અડ મધ્યગામાં \bar{I} એક બિંદુ છે, તો બતાવો કે \triangle અબઈ = \triangle અકઈ.

૫. અબક ત્રિકોણના બક પાયાને સમાંતર ડઈ દોરવામાં આવી છે, અને તે અબ તથા અકને ડ તથા \bar{I} બિંદુમાં છેદે છે; તો બતાવો કે \triangle અબઈ = \triangle અકડ.

૬. અબક ત્રિકોણના બક પાયાનું મધ્યબિંદુ \bar{I} છે, અને બઈમાં ફ એક બિંદુ છે; \bar{I} ડ એ અકને સમાંતર દોરવામાં આવી છે અને અકને ડમાં મળે છે; તો બતાવો કે \triangle ડફક = $\frac{1}{2}$ \triangle અબક.

૭. એક આપેલા ત્રિકોણના પાયા પર આપેલા ત્રિકોણની બરોબરનો એક સમઘિબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૮. ગમે તે શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી એક લીટી વડે આપેલા ત્રિકોણના બે સરખા ભાગ કરો.

૯. એક આપેલા ત્રિકોણના પાયા પર તેની બરોબરનો એક બીજો એવો ત્રિકોણ દોરો, કે જેની એક બાજુ એક

આપેલી સીધી લીટીની બરોબર હોય.

૧૦. અબક ત્રિકોણના ચક્ર પાયા પર અબક ત્રિકોણની બરોબરનો એક એવો ત્રિકોણ દોરો, કે તેનું શિરોબિંદુ એક આપેલી લીટીમાં આવે. આવું ક્યારે નહિ બની શકે ?

૧૧. આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેનો એક ખુણો એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય.

૧૨. બે બાજુઓ અને ક્ષેત્રફળ આપ્યાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૧૩. અબક ત્રિકોણની મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ ગ છે, તો બતાવો કે $\triangle ગઅક = \frac{1}{4} \triangle અબક$.

૧૪. આપેલા ત્રિકોણમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે તેમાંથી શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ (બાજુઓ સાથે) સરખા ત્રિકોણો બનાવે.

૧૫. ચતુષ્કોણના કોઈ શિરોબિંદુમાંથી એક લીટી દોરી તેના બે સરખા ભાગ કરો.

૧૬. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણોના છેદનબિંદુમાંથી કાઢેલી કોઈ પણ લીટી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

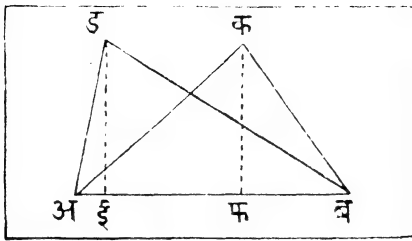
૧૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ પર લંબ દોરીને તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

૧૮. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી લીટી દોરી તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

૧૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની વધારેલી એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી લીટી દોરી તે ચતુષ્કોણને દુભાગો.

પ્રમેય ૩૦.

એકજ પાયા પરના સરખા ત્રિકોણો એકજ ઉચાઈના હોય છે.



પક્ષ—અવક ને અવડ બે સરખા ત્રિકોણો છે, અને એકજ પાયા અવ પર આવેલા છે. કફ અને ડઈ એ ત્રિકોણોની ઉંચાઈ બતાવે છે.

સાધ્ય—ડઈ=કફ.

સિદ્ધતા— \triangle અવક = $\frac{1}{2}$ અવ \times કફ; (પ્ર૦ ૨૮. ઉ૦ ૨)

અને \triangle અવડ = $\frac{1}{2}$ અવ \times ડઈ; (પ્ર૦ ૨૮. ઉ૦ ૨)

પરંતુ \triangle અવક = \triangle અવડ; (પક્ષ)

$\therefore \frac{1}{2}$ અવ \times ડઈ = $\frac{1}{2}$ અવ \times કફ.

ઉપલા સમીકરણની સરખી બાજુઓમાંથી સાધારણ અવયવ $\frac{1}{2}$ અવને કાઢી લો.

\therefore ડઈ=કફ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સરખા પાયા પરના સરખા ત્રિકોણો એકજ ઉંચાઈના હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—એકજ પાયા પરના અથવા એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા સરખા પાયા પરના, અને તેની એકજ બાજુ પર આવેલા બે ત્રિકોણો સરખા હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

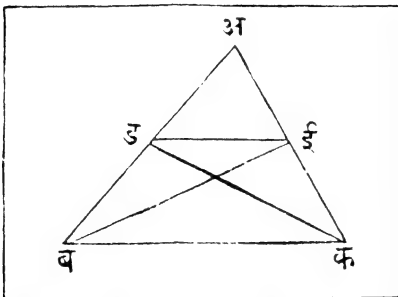
(કારણ કે પ્રમેય ૩૦ પ્રમાણે તે ત્રિકોણો એકજ ઉંચાઈના હોય છે, અને એકજ ઉંચાઈના ત્રિકોણો સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે આવેલા હોય છે).

(પ્ર. ૨૩. પ્રશ્ન ૧)

૩૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. ત્રિકોણની (બે) બાજુઓનાં મધ્ય બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૨. નીચે આપેલી આકૃતિમાં, જો અર્ધ $\triangle =$ અડક \triangle હોય, તો સિદ્ધ કરો કે ઢીં એ બકને સમાંતર છે.



૨૬થી ૩૦ સુધીના પ્રમેય પરના પરચુરણ પ્રશ્નો.

૧. જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુ બરાબર હોય, અને અંતર્મુણાઓ એક બીજાના ન્યૂનતા-પૂરક હોય, તો તે ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા હોય છે.

૨. જો ત્રિકોણો એકજ પાયા પર છે, પણ એકની ઉંચાઈ બીજાની ઉંચાઈ કરતાં બમણી છે; તો સિદ્ધ કરો કે પહેલા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના કરતાં બમણું છે.

૩. અડકડ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને અકમાં એક ઢીં બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે અડક અને અડક ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

૪. જો કોઈ ચતુષ્કોણના કોણો વડે તેના ચાર સરખા ભાગ પડતા હોય, તો બતાવો કે તે ચતુષ્કોણ સમાંતર-બાજુ છે.

૫. સમબાજુ ચતુષ્કોણની અંદર પડતા કોઈ પણ બિંદુ-

માંથી તેની બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો હંમેશાં એકજ હોય છે.

૬. એક કાટખુણ ચોખુણ અને એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર છે, અને તેમની પરિમિતિ પણ એકજ છે, અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો ૩૦ અંશનો છે; તો સાબીત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણ ચોખુણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અર્ધું છે.

૭. અબકઢ ટ્રાપીઝિઅમની* (સમલંબ ચોખુણની) બક અને અઢ બાજુઓ અસમાંતર છે, અને H તથા F તે બાજુઓનાં અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે; તો બતાવી આપો કે એ બિંદુઓમાંથી સમાંતર બાજુઓ પર દોરેલા લંબો વડે થતો કાટખુણ ચોખુણ ટ્રાપીઝિઅમની (સમલંબ ચોખુણની) બરોબર છે.

૮. અબક ત્રિકોણની બઢ અને K મધ્યગાઓ એક બીજીને ગમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે અઢગઈ ચતુષ્કોણ બગક ત્રિકોણની બરોબર છે.

૯. અબક ત્રિકોણના બક પાયામાં D અને E બિંદુઓ એવી રીતે લો કે બઢ તે E બરોબર થાય. અઢ અને A સંધો. અબને F માં મળે એમ અકને સમાંતર DF દોરો, અને અકને G માં મળે એમ અબને સમાંતર EG દોરો. હવે બતાવી આપો કે અઢક ત્રિકોણ AEG ત્રિકોણની બરોબર છે.

૧૦. અબકઢ ચોરસની અબ, બક, કઢ અને D બાજુઓમાં E , F , G , ને H એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે $2 \text{ AE} = 3 \text{ BF} = 4 \text{ CG} = 5 \text{ DH} =$ ચોરસની એક બાજુ થાય;

* જે ચતુષ્કોણની સામસામી બેજ બાજુઓ સમાંતર હોય તેને ટ્રાપીઝિઅમ અથવા સમલંબ ચોખુણ કહે છે.

તો બતાવી આપો કે આપેલા ચોરસની બાજુના $\frac{3}{4}$ બરાબરની બાજુ પર દોરેલા ચોરસની બરાબર રૂપગ્રહ છે.

૧૧. સમલંબ ચોખ્ખાની સમાંતર બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી તે ચોખ્ખાને દુભાગે છે, અને તે લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી સમાંતર બાજુઓ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટી તે સમલંબ ચોખ્ખાને દુભાગે છે.

૧૨. ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધવાથી થએલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં તે ચતુષ્કોણના અર્ધ બરાબર હોય છે.

૧૩. એક આપેલી સીધી લીટી પર, બની શકે તો, આપેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બરાબરનો એક સમલુગ્ન ચતુષ્કોણ દોરો.

૧૪. આપેલા ત્રિકોણની લાંબામાં લાંબી બાજુ પર તે ત્રિકોણ બરાબરનો એક સમલુગ્ન ચતુષ્કોણ દોરો.

૧૫. એક ચોરસ અને તેની બરાબરના કાટખુણ ચોખ્ખાની એક બાજુ આપેલાં છે; તો કાટખુણ ચોખ્ખાની બીજી બાજુ શોધી કાઢો.

૧૬. અબ પાયા પર સામસામી બાજુએ અબકડ અને અબક્ષય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે, અને (જરૂર પડે તો લંબાવીને) અબ વડે કક્ષને દુભાગવામાં આવી છે; તો બતાવી આપો કે બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો સરખા છે.

૧૭. ત્રિકોણની એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી દોરેલી લીટી વડે ત્રિકોણને દુભાગો.

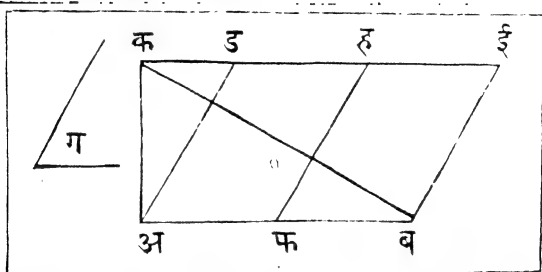


પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો).

કૃત્ય ૧૪.

આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક એવો સમાંતર-
આણુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેનો એક ખુણો આપેલા
ખુણાની બરોબર હોય.



અબક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને ગ આપેલો ખુણો છે.

રચના—અ આગળ ગ બરાબર બંધ ખુણો કરો.
અબને સમાંતર કમાંથી કડઈ લીટી દોરો. બમાંથી અડને
સમાંતર બઈ લીટી દોરો. અબને ફમાં દુભાગો. ફમાંથી
અડને સમાંતર ફહ લીટી દોરો.

અફહડ ધટ સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા— \therefore અબક ત્રિકોણ અને અબઈડ સમાંતર-
આણુ ચતુષ્કોણ એકજ પાયા પર અને સમાંતરઆણુઓની
એકજ જોડ વચ્ચે (સરખી ઉંચાઈના) છે,

$$\therefore \text{અબક } \triangle = \frac{1}{2} \text{ અબઈડ } \square. \quad (\text{પ્ર૦ ૨૮})$$

$$\therefore \text{અફ} = \text{ફબ}, \text{ અને અબ } \parallel \text{ ડઈ},$$

$$\therefore \text{અફહડ } \square = \text{ફબઈહ } \square; (\text{પ્ર૦ ૨૭ ઉ૦ ૧})$$

$$\therefore \text{અફહડ } \square = \frac{1}{2} \text{ અબઈડ } \square;$$

અને અવક $\triangle = \frac{1}{2}$ અવર્ડ \square ,

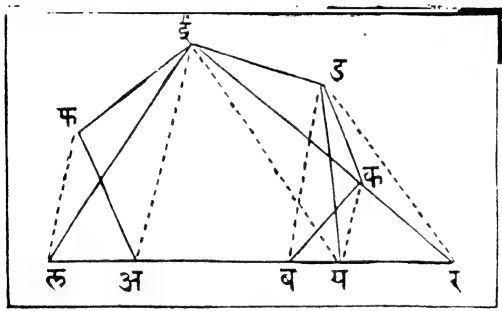
\therefore અફહડ $\square =$ અવક \triangle .

૧૪મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક એવો સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ દોરો, કે જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય.

કૃત્ય ૧૫.

જેનો એક ખુણો આપેલા ખુણા બરોબર હોય એવો, આપેલી બહુકોણ આકૃતિ બરોબરનો એક સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ દોરો.



અવકર્ડફ એક બહુકોણ આકૃતિ છે.

રચના અને સિદ્ધતા—અબને બેઉ બાજુએ લંબાવો. વડ સાંધો. કમાંથી ઢબને સમાંતર એક લીટી દોરો. ધારો કે તે લંબાવેલી અબને ચમાં મળે છે. ઢય સાંધો.

\therefore ઢબ \parallel કય (રચના)

$\therefore \triangle$ વડક $= \triangle$ વડય (પ્ર૦ ૨૯)

આ સરખા ત્રિકોણોમાં અવકર્ડફ આકૃતિ ઉમેરો.

\therefore અવકર્ડફ $=$ અયર્ડફ.

અવકર્ડફ આકૃતિને છ બાજુઓ છે, પણ તેની બરા-

બર દોરેલી અચડર્ફ નવી આકૃતિને પાંચ બાજુઓ છે; અને જે ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણેની કૃતિ ફરી ફરીને કરવામાં આવશે, તો આકૃતિની બાજુઓમાંથી એક એક ઓછી થતી જશે, અને આખરે ત્રિકોણની આકૃતિ બનશે.

પછી ૧૪મા કૃત્ય પ્રમાણેની રચના કરી ૬૯ સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો.

ખંડ ૨.



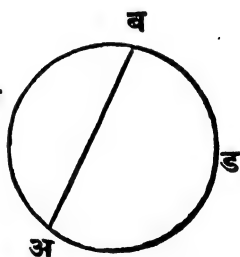
પ્રકરણ ૧.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વર્તુળ.

૧. પારિભાષિક શબ્દો.

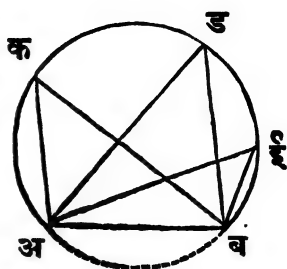
વર્તુળના પરિધ પર અ ને બ બિંદુઓ લઈ અબ જ્યા દોરેલી છે. અબની સામસામી બાજુએ પરિધ પર ક ને ક બિંદુઓ લીધાં છે. હવે અકબ કૉંસ અને અબ જ્યા વડે થએલી આકૃતિ વર્તુળખંડ કહેવાય છે. એજ પ્રમાણે અકબ કૉંસ અને અબ જ્યાથી થએલી આકૃતિ પણ વર્તુળખંડ કહેવાય છે.



જ્યા અને તેણે કાપી કાઢેલા પરિધના ભાગથી થએલી આકૃતિને વર્તુળખંડ કહે છે.

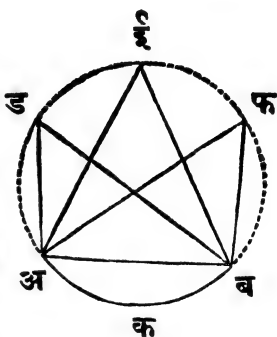
એક જ્યાથી વર્તુળના જે જે વર્તુળખંડો થાય છે તેમાંથી પ્રત્યેકને ખીજનો વ્યુત્કંભખંડ કહે છે.

અકબ વર્તુળખંડના પરિધ પર ક, ડ, ઈ, ... બિંદુઓ લીધાં છે, ને તેમને અ અને બ સાથે સાંધ્યાં છે. આવી રીતે થએલા અકબ, અડબ, અઈબ... ખુણાઓને વર્તુળ-ખંડમાંના ખુણા કહે છે.



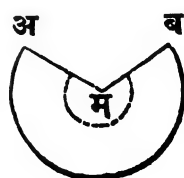
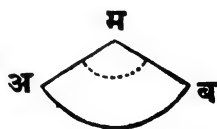
વર્તુળખંડના કૌંસ પરના કોઈ બિંદુમાંથી જ્યાના બે છેડાનાં બે બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓ વડે થએલા ખુણાને વર્તુળ-ખંડમાંના ખુણા કહે છે.

અકબ કૌંસ છે. પરિધના બાકીના ભાગ પર ડ, ઈ, ફ.... બિંદુઓ લીધાં છે. અડ, ડબ, અઈ, ઈબ, અફ, ફબ સાંધો. અડબ, અઈબ, અફબ ખુણાઓને પરિધકોણ (એટલે અકબ કૌંસની સામે આવેલા પરિધ પરનાં બિંદુ આગળના ખુણા) કહે છે.



કૌંસના છેડાનાં બે બિંદુઓમાંથી પરિધના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓથી થતો ખુણો તે કૌંસ ઉપરનો પરિધકોણ કહેવાય છે.

વર્તુળનો ગમે તે અંશ કૌંસ લો. મ મધ્યબિંદુ છે એમ સમજો. અમ તથા મબ સાંધો. અમબ ખુણો મધ્યકોણ (મધ્યબિંદુ આગળનો ખુણો) કહેવાય છે. અમ, મબ સાંધવાથી મ બિંદુ આગળ જે (જોડેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એક સાદો અને એક બહિર્વક) બે ખુણા થાય છે, તેમાંથી જે ખુણો જે કૌંસની સામે આવેલો હોય છે તે ખુણો



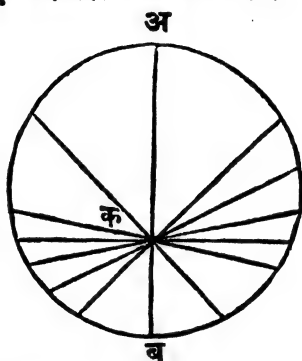
તે કૌંસ પરનો મધ્યકોણ કહેવાય છે. પાસેની આકૃતિમાં ટપકાં વડે દર્શાવેલો બહિર્વક ખુણો અબ કૌંસ પરનો મધ્યકોણ છે.

મધ્યબિંદુમાંથી કૌંસના છેડાનાં બે બિંદુઓ સુધી કાઢેલી લીટીઓથી થતો ખુણો તે કૌંસ પરનો મધ્યકોણ કહેવાય છે.

વ્યાસ તથા તેની સાથે જુદા જુદા ખુણા કરનારી જ્યાઓ વિષે.

અબ વ્યાસમાં મધ્યબિંદુ સિવાયનું એક ક બિંદુ લો. ક બિંદુમાંથી અબ સાથે તિર્યક્કોણ કરનારી એક જ્યા દોરો.

એ તિર્યક્કોણ કરતાં નાનો તિર્યક્કોણ કરે એવી એક બીજી જ્યા કમાંથી દોરો. એ કરતાં પણ નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી વળી બીજી જ્યા કમાંથી દોરો.....૪૦ આ પ્રમાણે અબ સાથે જ્યાએ કરેલો ખુણો કાઢખુણો થાય ત્યાંસુધી નાનો



ને નાનો તિર્યક્કોણ કરતી જાય એવી જુદી જુદી જ્યાઓ દોરો. હવે વ્યાસ વડે જ્યાના જે બે ભાગ થાય છે તેનું ગુણોત્તર, અને અબ સાથે જ્યા જે ખુણો કરે છે તેના ઓછાવત્તા તિર્યક્ષણ વચ્ચે કંઈ સંબંધ છે કે નહિ તે જુઓ. (વ્યાસ સાથે સૌથી મોટો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગ માપો. તેથી ઓછો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગ માપો. એમ બીજી નાનો ને નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના ભાગ માપો. તમારા સમજવામાં શું આવે છે? “ વ્યાસ સાથે સૌથી મોટો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના જે બે ભાગ પડે છે, તેમાં એક ભાગ બીજા કરતાં ઘણો મોટો છે. વ્યાસ સાથે તેથી નાનો તિર્યક્કોણ કરનારી જ્યાના બે ભાગો એટલા વિષમ નથી....૪૦

જે જ્યા વ્યાસ સાથે કાટખુણો કરે છે તેના ભાગો સરખા છે.” આ પરથી તમે શું અનુમાન કરો છો ?

“વ્યાસ સાથે જ્યાએ કરેલો ખુણો જેમ મોટો, તેમ તે જ્યાના બે ભાગો વચ્ચે વિષમતા વધારે. જ્યારે આ ખુણો કાટખુણો હોય, ત્યારે બે ભાગો બરોબર હોય.”

ઉપલી આકૃતિમાં કમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી બીજી લીટીઓ સાથે અક, બક સરખાવો, અને જુઓ કે કઈ મોટામાં મોટી છે ને કઈ નાનામાં નાની છે. “અક મોટામાં મોટી છે, ને બક નાનામાં નાની છે.” આ પરથી ક્યો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે તે કહો.

“વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી જેટલી લીટીઓ દારવામાં આવે, તે સઘળીમાં મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થનારી લીટી સૌથી મોટી હોય છે, અને તેથી ઉલટી દિશામાં જનારી લીટી સૌથી નાની હોય છે.”

ઉપર આપેલી આકૃતિમાં અક અથવા બક સાથે સરખા ખુણાઓ કરનારી લીટીઓ દોરો, અને તેમને સરખાવો. શું માલમ પડે છે ? એ પરથી ક્યો સામાન્ય નિયમ તમે ઉપજાવી શકો છો ?

“વર્તુળના વ્યાસમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી અને વ્યાસ સાથે સરખા ખુણાઓ કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.”

એજ આકૃતિમાં અબમાં આવેલા મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી એક લીટી દોરો. એજ બિંદુમાંથી પહેલી લીટી બરોબરની બીજી લીટીઓ પરિધ સુધી દોરો. આવી લીટીઓ કેટલી દોરી શકાય તેના નિશ્ચય કેવી રીતે કરી શકશો ? “તે બિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈ

અને આપેલી લીટી ખરોખરની ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો.” માગી છે તેવી કેટલી લીટી દોરી શકાશે? “બે.” તે બંને વ્યાસની એકજ બાજુએ દોરી શકાય ખરી? “ના.” (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળ્યો?

“વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દ્રક્ત બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય, અને તે બે લીટીઓ વ્યાસની સામસામી બાજુએ આવે.”

આવી સરખી લીટીઓ દોરો. વ્યાસ સાથે તે બંને જે ખુણાઓ કરે તેનું માપ લો. શું માલમ પડે છે? (પુ૦). એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજવાય?

“વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી સરખી લીટીઓ વ્યાસ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે.”

અબમાંના ક (અથવા મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ બીજા) બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખાવો, અને આ લીટીઓની લંબાઈ, અને વ્યાસના નાના ભાગ સાથે તેઓ જે ખુણાઓ કરે છે તેના મહત્ત્વ વચ્ચે કંઈ સંબંધ છે કે નહિ તે જુઓ.

“વર્તુળના વ્યાસમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી લીટી, તેણે વ્યાસના નાના ભાગ સાથે કરેલા ખુણાના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં હોય છે (એટલે કે જેમ ખુણા મોટો, તેમ તે લીટીની લંબાઈ વધારે).”

એક વર્તુળને તેના મધ્યબિંદુમાં થઈને વળ જાય એમ વાળી વ્યાસ બનાવો. વ્યાસમાં ગમે તે એક બિંદુ લો, અને વર્તુળને ફરીથી વાળીને એ બિંદુમાંથી સામસામી બાજુએ

વ્યાસ પર લંબો પાડો. આ લંબો સરખા માલમ પડે છે. (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજવી શકો છો ?

વ્યાસમાં ગમે તે એક બિંદુ લો, અને તેમાંથી વ્યાસ સાથે કાટખુણો કરે એવી પરિધ સુધીની લીટી દોરો. આ લીટીના બે ભાગ સરખાવો. (પુ૦). તમને શું માલમ પડે છે ?

“ જો વ્યાસ જ્યાં સાથે કાટખુણો કરતો હોય, તો તે જ્યાંને દુભાગે છે. ”

એક વર્તુળમાં અબ જ્યાં દોરો. તેને કમાં દુભાગો. કને મધ્યબિંદુ મ સાથે સાંધો. મકઅ અને મકબ ખુણાઓ માપો. તેમનું મહત્ત્વ કેવડું છે ? “ કાટખુણો જેવડું. ” (પુ૦). આ પરથી તમે શું શીખો છો ?

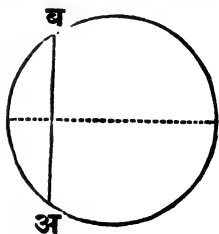
“ જો વ્યાસ જ્યાંને દુભાગતો હોય, તો તે જ્યાં સાથે કાટખુણો કરે છે. ”

ઉપલા પ્રયોગ ઉપરથી જ્યાંને દુભાગનાર લંબની અને મધ્યબિંદુની સ્થિતિ વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ ?

“ જ્યાંને દુભાગનાર લંબને બંને બાજુ તરફથી પરિધ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો તે વર્તુળનો વ્યાસ બને છે, એટલે કે જ્યાંને દુભાગનાર લંબમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ હોય છે. ”

૩. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ.

એક કાગળ પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ લીટી દોરી બનાવેલા વર્તુળમાં એક અબ જ્યાં દોરો. અ બિંદુ બ પર પડે એમ અબ જ્યાંને અને અલગત વર્તુળને પણ વાળો. વર્તુળના બંને ભાગો એક બીજા પર બંધબેસતા આવી રહે છે ? “ હા. ”



પડેલા સળે અથ સાથે કરેલા ખુણાનું મહત્વ કેટલું છે ?
 “ કાટખુણા જેટલું. ” (પુ૦). આ પરથી અથ જ્યાં અને
 સળની લીટી વચ્ચે કેવો સંબંધ માલમ પડે છે ? “ તે અથ
 જ્યાંને કાટખુણે દુભાગે છે. ”

વાળવાથી વર્તુળના જે બે ભાગ પડે છે, તે એક બીજા
 સાથે બરોબર બંધબેસતા હોય, તો વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ક્યાં
 હોવું જોઈએ ? “ સળની લીટીમાં, એટલે કે અથ જ્યાંને
 દુભાગનાર લંબમાં. ” આ લંબમાં ક્યાં ? “ મધ્યભાગે. ”

આ પરથી વર્તુળનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢવા સંબંધમાં
 આપણે શું શીખીએ છીએ ?

એ વર્તુળમાં એક બીજી કાઢ જ્યાં દોરો. આ જ્યાંને
 દુભાગનાર લંબ દોરો. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ આ લીટીમાં છે ?
 “ હા. ”

જો આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ અથને દુભાગનાર લંબમાં અને
 કાઢને દુભાગનાર લંબમાં પણ છે, તો મધ્યબિંદુ કયું હોવું
 જોઈએ ? “ આ બે લીટીઓનું છેદનબિંદુ. ” આ પરથી
 વર્તુળનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢવાની રીત ઉપજાવો.

બાજુ પર આપેલો કૌંસ જે વર્તુળનો ભાગ હોય તે વર્તુળ
 કાઢવું હોય તો શી રીતે કાઢશો ?

આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કેવી રીતે
 કાઢશો ? ધારો કે એક ટપકાંવાળી

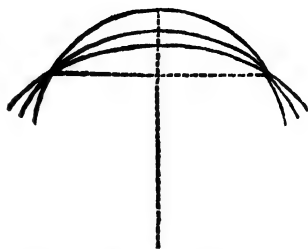


લીટી વર્તુળનો બાકીનો ભાગ બતાવે છે. આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ
 ઉપર વર્ણવેલી રીતે કયે પ્રકારે શોધી કાઢશો ? “ પરિધિ
 પર ત્રણ બિંદુ લઈ અથવા બે જ્યાં દોરી.....ઈ૦. ”

આપેલા કૌંસમાં તેજ ત્રણ બિંદુઓ લો અથવા બે જ્યાં
 દોરો, અને તે બંને જ્યાંને દુભાગનાર લંબ દોરો.

પાસે એક બીજાને છેદનાર કૌંસો આપેલા છે. એ

કૈંસોની નકલ દોરો અને જે
વર્તુળના તે ભાગ હોય તે
વર્તુળ પુરા દોરો.



૪. સમાન મધ્યકોણ, કૈંસ, અને જ્યા.

એક વર્તુળ દોરો અને તેમાં બે સરખા મધ્યકોણ કરો. આમાંના એક મધ્યકોણ જે કૈંસ પર હોય તે કૈંસને કાપીને બીજા પર મૂકો, અને બંને કૈંસો તથા તેમની જ્યાઓ સરખાવો.

આ ઉપરથી સરખા મધ્યકોણની સામે આવેલા કૈંસો સંબંધમાં તેમજ સરખા કૈંસોની જ્યા સંબંધમાં કયા સામાન્ય નિયમ ઉપર તમે ઉતરો છો ?

“જે કોઈ વર્તુળમાં, બે કૈંસોની સામે આવેલા મધ્યકોણો સરખા હોય, તો તે કૈંસો અને તે કૈંસોને કાપી કાઢનાર જ્યાઓ સમાન હોય છે.”

બે સરખાં વર્તુળો દોરો. એકના મધ્યકોણને બીજાના મધ્યકોણ કરતાં બમણો રાખો. જે બે કૈંસો પર એ ખુણાઓ આવેલા છે, તેમાંથી નાના કૈંસને કાપી કાઢો અને મોટા પર મૂકીને તેની સાથે સરખાવી જુઓ. શું માલમ પડે છે ? (પુ).

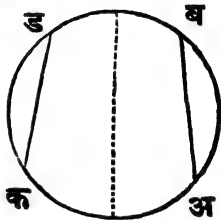
એક વર્તુળમાં અબ અને કડ બે અ સરખા કૈંસો લો. અ, બ, ક, ડ બિંદુઓમાંથી મધ્યબિંદુ મ સુધી લીટીઓ દોરો. અબ કૈંસ કડ કૈંસ ઉપર પડે એવી રીતે વર્તુળને વાળો. સળ મ બિંદુમાં થઈને પસાર થાય



છે. હવે જ્યારે સળ મ બિંદુમાં થઈને જાય છે, અને અ બિંદુ ક ઉપર અને બ બિંદુ ડ ઉપર પડે છે, ત્યારે તો એ પણ જોવામાં આવશે કે અમ લીટી કમ ઉપર અને બમ લીટી ડમ ઉપર ખરાબર પડી રહે છે. આ પરથી એજ ઠરે છે કે અમબ ખુણા કમડ ખુણાની ખરાબર છે. એ પરથી ક્યો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“સરખા કૌંસો સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય છે.”

એક વર્તુળ દોરો. તેમાં અબ ને ડ બ કડ એ સરખી જ્યા લો. અબ લીટી કડ પર પડે એવી રીતે વર્તુળને વાળો. તમને માલમ પડશે કે અબ કૌંસ કડ કૌંસની ખરાબર છે. વર્તુળખંડ અબ ક કાપી કાઢો અને કડ ઉપર મૂકો. (પુ. ૦). આ પ્રયોગ ઉપરથી ક્યો નિયમ તમે ઉપજાવી શકો છો ?



“સરખી જ્યાઓ સરખા કૌંસો કાપી કાઢે છે, અને સરખી જ્યાઓ વડે વર્તુળના જે વર્તુળખંડ પડે છે તે પણ સરખા હોય છે.”

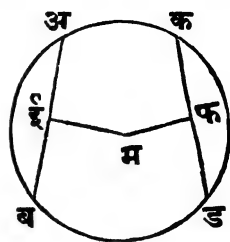
એક વર્તુળમાં એક જ્યાથી બીજી ખમણી હોય એવી જે જ્યાઓ લો, અને તેમણે કાપી કાઢેલા કૌંસો સરખાવો. જ્યાઓએ કાપી કાઢેલા કૌંસો જ્યાના પ્રમાણમાં છે ? “ના.”

એક વર્તુળમાં એક કૌંસ બીજાથી ખમણો લો, અને તેમની જ્યાઓ સરખાવો. કૌંસોની જ્યાઓ કૌંસોના પ્રમાણમાં છે ? “ના.”

મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ.

મધ્યબિંદુ મમાંથી અબ અને કડ જ્યા ઉપર મૂકે અને

મફ લંબો દોરેલા છે, અને ર્મ તે મફની બરોબર છે. ર્મ લીટી મફ ઉપર પડે એવી રીતે મ બિંદુમાંથી વર્તુળને વાળો. સળ તે વર્તુળના બે સરખા ભાગ કરશે.



હવે \therefore ર્મ=મફ,

\therefore ર્મ બિંદુ ફ પર પડશે.

\therefore \angle મર્અ = \angle મફક,

\therefore અબ લીટી કડની દિશામાં પડશે.

પરંતુ મ મધ્યબિંદુ છે, માટે અબ તરફનું અર્ધવર્તુળ કડ તરફના અર્ધવર્તુળ ઉપર પડશે; અને અ, બ, ક, ડ પરિધ ઉપર હોવાથી, અ બિંદુ ક ઉપર અને બ બિંદુ ડ ઉપર પડશે. (એટલે કે અબ કૉંસ કડ કૉંસ ઉપર પડશે).

\therefore અબ જ્યા = કડ જ્યા.

અબ અને કડ જ્યા માપો, અને તેની સરખામણી કરો. શું માલમ પડે છે? (પુઁ).

આ ઉપરથી એકજ વર્તુળમાં મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યા સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ સરખી હોય છે.”

અબકડ વર્તુળમાં અબ અને કડ બે સરખી જ્યાઓ દોરો. તે બંને પર મધ્યબિંદુ મમાંથી મર્ ને મફ લંબો દોરો. મર્ ને મફ માપો. (પુઁ).

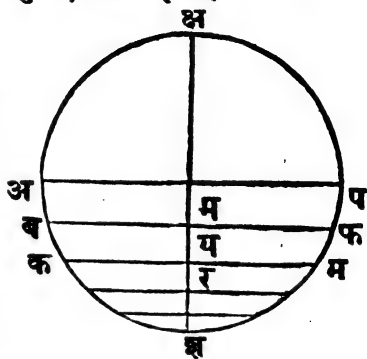
આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુથી સરખી જ્યાઓનાં અંતર સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“વર્તુળની સરખી જ્યાઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે.”

૫. સ્પર્શલીટીઓ.

મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને ક્ષમજ્ઞ તેનો વ્યાસ છે. અમપ; બચફ.....

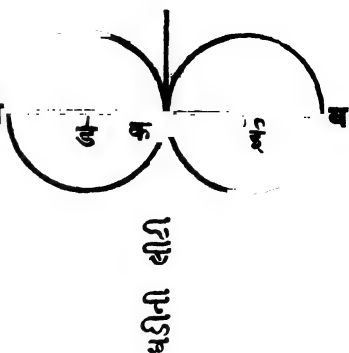
લીટીઓ વ્યાસથી કાટખુણે દોરેલી છે. આ લીટીઓના થએલા એકજ તરફના ભાગોને સરખાવતાં શું જોવામાં આવે છે? “બચ લીટી અમ કરતાં નાની છે.....૪૦.” જેમ જેમ આ ભાગો મધ્યબિંદુથી



દૂર હોય છે, તેમ તેમ તે વધારે નાના હોય છે. વ્યાસમાંથી પસાર થતી એવી એકે લીટી છે, કે જેનો જરા પણ ભાગ વર્તુળની અંદર ન પડતો હોય? “ક્ષમાંથી ક્ષજ્ઞ પર લંબ રૂપે દોરેલી લીટી.” (તેજ પ્રમાણે ક્ષમાંથી ક્ષજ્ઞ પર લંબ રૂપે દોરેલી લીટી.) આ લીટી વર્તુળને છેદતી નથી, પણ તેને માત્ર સ્પર્શ કરે છે; તેથી એ સ્પર્શલીટી કહેવાય છે. જે આ લીટી વ્યાસથી કાટખુણે દોરવામાં ન આવે, તો શું પરિણામ આવશે? એવી લીટીઓ દોરો અને તપાસો. “આ લીટીઓનો ડાબો અથવા જમણો ભાગ વર્તુળમાં થઈને જાય છે અથવા વર્તુળમાંજ પડે છે. માટે (વ્યાસના છેડામાંથી પસાર થતી) જે લીટીઓ વ્યાસથી કાટખુણે નથી, તે વર્તુળને છેદે છે; તેથી તેઓ વર્તુળને સ્પર્શ કરતી નથી એ ખુલ્લુંજ છે. આ કારણથી, જે લીટી વ્યાસના છેડા આગળ વ્યાસ સાથે કાટખુણે કરે છે, તે સ્પર્શલીટી કહેવાય છે.

વ્યાખ્યા—જે લીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે પણ લંબાવવાથી તેને છેદતી નથી, તે સ્પર્શલીટી કહેવાય છે.

એક સીધી લીટી અથ
 લો. તેને ક બિંદુમાં દુભાગો.
 આ દરેક ભાગને પાછો ઢ અ
 અને ફ બિંદુઓમાં દુભાગો.
 ઢ મધ્યબિંદુ લઈને ઢક
 ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો,
 અને ફ મધ્યબિંદુ લઈ ફક
 ત્રિજ્યાએ એક બીજું વર્તુળ
 દોરો.



બંને વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સરખી છે; માટે બંને વર્તુળો
 બરાબર છે.

કબ લીટી કઅ ઉપર પડે એવી રીતે ક બિંદુ આગળથી
 કાગળ વાળો. હવે કઢ લીટી ફઈની બરાબર છે, માટે ફ
 બિંદુ ઢ પર પડશે.

બંને વર્તુળો સરખાં છે, અને એકતું મધ્યબિંદુ બીજાના
 મધ્યબિંદુ પર પડે છે; માટે તેના પરિધો પણ એક બીજા
 પર આવી રહેશે.

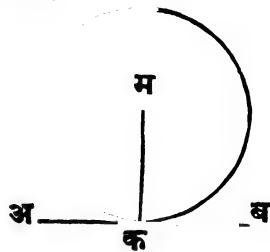
સળની લીટી બે વર્તુળોની વચ્ચે છે. આ લીટીમાં અને
 બંને વર્તુળમાં સામાન્ય હોય એવું ફક્ત ક બિંદુ છે. એ
 પરથી ખુદલું માલમ પડે છે કે બંને વર્તુળો એક બીજાને
 કેવળ સ્પર્શજ કરે છે, અને ઉપર કહેલી લીટી વર્તુળોને કેવળ
 સ્પર્શ કરે છે. (આ લીટી અમુક વર્તુળમાંથી પસાર થાય છે
 એમ કહી શકાશે? “ના”.)

આ લીટી અક અને બક સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?
 “કાટખુણો.” આ ઉપરથી સ્પર્શલીટી દોરવા માટે કયો નિયમ
 ઉપજાવી શકો છો?

કેટલીક સ્પર્શલીટીઓ દોરો, અને વર્તુળને જ્યાં તે સ્પર્શ
 કરે છે તે સ્પર્શબિંદુઓમાંથી બાંસો દોરો. સ્પર્શલીટીઓ

બાસે સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? (પું.)

પાસેની આકૃતિમાં વર્તુળ અથવા લીટીને સ્પર્શ કરે છે. વર્તુળના પરિધ ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે. હવે, બ્યારે સ્પર્શલીટીમાંનું એકજ બિંદુ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, અને



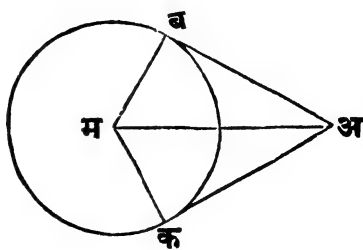
બીજાં બધાં બિંદુઓ પરિધથી દૂર છે, ત્યારે તો ખુલ્લુંજ માલમ પડે છે કે લીટીના જે બિંદુમાં વર્તુળ તે લીટીને સ્પર્શ કરે છે, તે તે લીટીના બીજા કોઈ પણ બિંદુ કરતાં મધ્ય-બિંદુની વધારે નજદીક છે. પણ મથી અથવા સુધીનું ટુંકામાં ટુંકું અંતર મ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલો લંબ છે. માટે, એ ખુલ્લુંજ છે કે અથવા લીટી મક ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે.

આ પ્રયોગો પરથી નીચેના સામાન્ય નિયમ નીકળે છે.

“જે બિંદુ આગળ સ્પર્શલીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, તે બિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા સ્પર્શલીટીને કાટખુણો હોય છે.”

વર્તુળ બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે તેટલી લીટીઓ દોરો. કેટલી સ્પર્શલીટીઓ દોરી શકાશે? “બે.”

અમાંથી અથવા, અક બે સ્પર્શલીટીઓ દોરો. મ મધ્યબિંદુ છે. અમ સાંધો. અથવા, અક માપો. તેમને સરખાવો. બઅમ ખુણો માપો, અને કઅમ ખુણો



પણ માપો. અને ખુણા સરખાવો. વમઅ અને કમઅ ખુણાઓ માપો અને તેમને સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી સામાન્ય નિયમ કયો નીકળે છે ?

“બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બેઝ લીટીઓ દારી શકાય; આ સ્પર્શલીટીઓ સરખી હોય છે; અને બહારના બિંદુને તથા મધ્ય-બિંદુને જોડનાર લીટી સાથે જે ખુણાઓ તે સ્પર્શ-લીટીઓ કરે છે તે સરખા હોય છે.”

૬. એક બીજને સ્પર્શ કરતાં વર્તુળો.

એક બીજને બહારથી સ્પર્શ કરે એવાં બે વર્તુળો દોરો. તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાધો. તેમને સાંધનારી લીટી સ્પર્શબિંદુમાં થઈને જાય છે કે તેની બહારથી ? “સ્પર્શબિંદુમાં થઈને.” એક બીજને અંદરથી સ્પર્શ કરે એવાં બે વર્તુળો દોરો, અને ઉપલો પ્રયોગ કરી જુઓ. (પુ૦). એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ કાઢી શકો છો ?

એક અબ લીટી લો. અ મધ્યબિંદુ લઈને અબ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. અબમાં ગમે તે એક ક બિંદુ લો. ક મધ્યબિંદુ લઈને કબ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો જે ભાગમાં એક બીજને સ્પર્શ કરે છે તે ભાગની લંબાઈ કેટલી છે ? “બિંદુ.” જે ઉપલા પ્રયોગમાં ક બિંદુ અબ લીટીની બહાર લેવામાં આવે, અને કબ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરવામાં આવે, તો તે વર્તુળ પહેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરશે કે છેદશે ? “તે વર્તુળને છેદશે.” આ પરથી એક બીજને અંદરથી સ્પર્શ કરતાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી ક્યા બિંદુમાં થઈને જાય છે, તે સંબંધમાં કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ? અબને લંબાવી વધારેલા ભાગમાં ક બિંદુ લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. અંદરથી અથવા

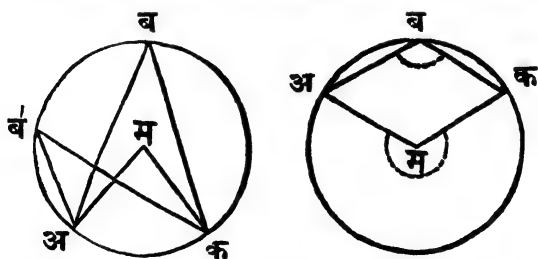
બહારથી એક બીજને સ્પર્શ કરતાં વર્તુળો સંબંધમાં આ અને આગલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ ઉપજવી શકો છો ?

“બે વર્તુળો એક બીજને એકજ બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે, અને તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સ્પર્શબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.”

૭. એક બીજને છેદતાં વર્તુળો.

એક બીજને છેદતાં હોય એવાં બે વર્તુળો દોરો. જે બિંદુઓમાં તેઓ એક બીજને છેદે છે તે બિંદુઓ સાંધો. તે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે ? “કાટખુણો.” બીજી લીટી વડે પહેલીના જે બે ભાગ થાય છે તેને સરખાવો. શું માલમ પડે છે ? “બંને સરખા છે.”

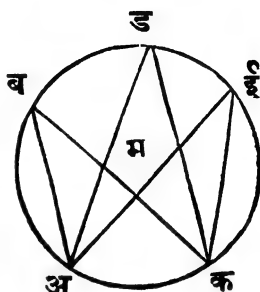
૮. કૌંસ સામેના મધ્યકોણો તથા પરિધકોણો.



અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો એક અંક કૌંસ લો. એ કૌંસ પર પરિધના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ એક અબક ખુણો કરો. કૌંસના છેડા અ તથા કને મધ્યબિંદુ મ સાથે સાંધો. અબક અને અમક માપો અને તેમને સરખાવો. અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો કૌંસ લો, અને ઉપર પ્રમાણેજ પ્રયોગ કરી જુઓ. એ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“કોઈ પણ કૌંસની સામેના મધ્યકોણ તેજ કૌંસ સામેના પરિધકોણ કરતાં બમણો હોય છે.”

અક કૌંસ પર અબક, અડક, અઈક... એવા ગમે તેટલા ખુણાઓ કાઢો. આ ખુણાઓ મધ્યકોણ અમકના અર્ધ જેવડા છે. આ પરથી અબક, અડક, અઈક... વગેરે ખુણાઓના પરસ્પર પ્રમાણ વિષે શું સમજાય છે ? “ તે બધા



સરખા છે.” તે સધળા એકજ કૌંસ ઉપરના પરિધકોણો છે; માટે એકજ અથવા સરખા કૌંસ પરના પરિધકોણો સંબંધમાં કયા સામાન્ય નિયમ પર તમે ઉતરો છો ?

“ એકજ કૌંસ અથવા સરખા કૌંસો ઉપરના બધા પરિધકોણો સરખા હોય છે. ”

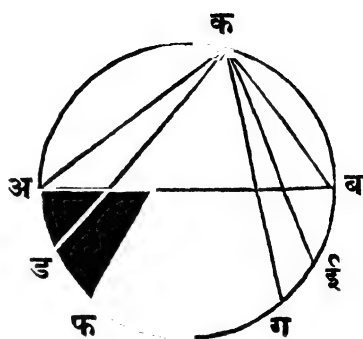
૯. વર્તુળખંડોમાંના ખુણાઓ.

એક અર્ધવર્તુળમાં ત્રણ ચાર પરિધકોણો કાઢો. તેમને માપો. શું માલમ પડે છે ? “ તે સધળા કાટખુણા છે. ”

અર્ધવર્તુળ ઉપર ત્રિકોણમાપ (સેટ સ્કવેર) એવી રીતે ગોઠવો કે કાટખુણો કરનારી એક બાજુ વ્યાસના એક છેડા પર પડે અને કાટખુણાનું શિરોબિંદુ પરિધના કોઈ પણ ભાગ પર પડે. તે ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ અર્ધવર્તુળ પરના કયા બિંદુને સ્પર્શ કરે છે ? “ વ્યાસના બીજા છેડાને. ” આ પરથી અર્ધવર્તુળમાંના ખુણા સંબંધી કયો નિયમ નીકળે છે ?

“ અર્ધવર્તુળમાંના સધળા ખુણાઓ કાટખુણા છે. ”

અબ વ્યાસની ઉપલી બાજુએ પરિધ પર એક ક બિંદુ લો. વ્યાસની નીચેની બાજુએ પરિધ પર ડ અને ફ બિંદુઓ લો. ડકઈ વર્તુળખંડ અકબ કરતાં મોટો છે કે નાનો ? “મોટો.” ડક તથા ફક સાંધો. ડકઈ ખુણા અકબ કાટખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? “નાનો.”

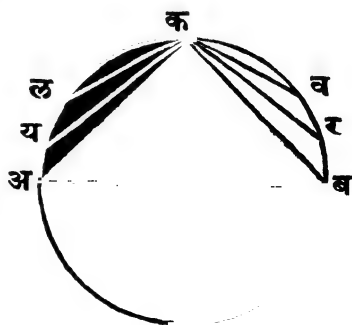


ડઈ નીચે પરિધ પર ફ અને ગ બિંદુઓ લો. વર્તુળખંડ ફકગ, ડકઈ કરતાં મોટો છે કે નાનો ? “મોટો.” ફકગ ખુણા ડકઈ ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? “નાનો.” (પુઠો).

આ પરથી વર્તુળખંડ જેમ જેમ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો થતો જાય, તેમ તેમ વર્તુળખંડમાંના ખુણાઓના મહત્ત્વમાં કેવો ફેરફાર થાય છે, તે સંબંધમાં શું સમજવામાં આવે છે ?

“જેમ જેમ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો હોય છે, તેમ તેમ તે વર્તુળખંડનો ખુણા કાટખુણા કરતાં નાનો હોય છે.”

અબ વ્યાસ છે. અબની ઉપલી બાજુએ પરિધ પર ય અને ર ગમે તે બિંદુઓ લો. યક અને રક સાંધો. યકર વર્તુળખંડ અકબ કરતાં મોટો છે કે નાનો ? “નાનો.” યકર ખુણા અકબ કાટખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? “મોટો.” યરની ઉપલી બાજુએ



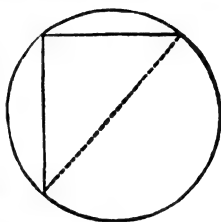
પરિધ પર લ અને વ બિંદુઓ લો. લક તથા વક સાંધો. લકવ વર્તુળખંડ ચક્ર કરતાં મોટો છે કે નાનો ? “નાનો.” લકવ ખુણા ચક્ર ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો ? “મોટો.” (પુ૦). જેમ જેમ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો તે નાનો થતો જાય છે, તેમ તેમ પરિધ આગળના ખુણાના મહત્વમાં શો ફેર થતો જાય છે ?

“વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં જેમ નાનો, તેમ તે વર્તુળખંડમાંનો ખુણો કાટખુણા કરતાં મોટો હોય છે.”

એક વર્તુળમાં કોઈ પણ જ્યાં દોરો.

એ જ્યાંના છેડા આગળથી કાટખુણે એક ખીજી જ્યાં દોરો. આ બે જ્યાંઓના છેડા સાંધનારી લીટી પર કાગળને વાળો. શું માલમ પડે છે ? “જે વર્તુળખંડમાંનો (જ્યાંઓ વચ્ચેનો)

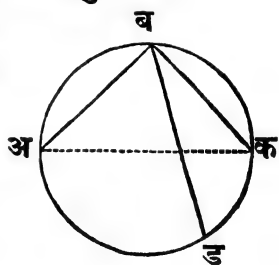
ખુણો કાટખુણો થયો છે, તે અર્ધવર્તુળ છે.”



એક વર્તુળમાં અબક કાટખુણો

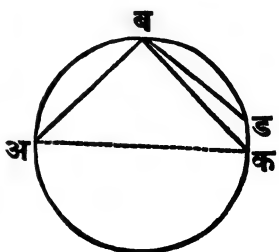
છે. અબના બ બિંદુમાંથી એક લીટી દોરી અબ સાથે એક સાંકડો ખુણો કરો. આ સાંકડો ખુણો જે વર્તુળખંડમાં છે તે અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો છે કે નાનો ?

“મોટો.” કેમ ?



એક વર્તુળમાં અબક કાટખુણો

છે. અબના બ બિંદુ આગળ એક પહોળો ખુણો કરો. આ ખુણો જે વર્તુળખંડમાં છે, તે અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો છે કે મોટો ? “નાનો.”



ઉપલા ત્રણ પ્રયોગો પરથી કયો નિયમ નીકળે છે ?

એક અબ લીટી લો. તેના ઉપર ત્રિકોણમાપ જુદી જુદી સ્થિતિમાં ગોઠવો, એવી રીતે કે કાટ-

ખુણો કરનારી ત્રિકોણમાપની બાજુઓ

અ તથા બને સ્પર્શ કરે. કાટખુણાના

શિરોબિંદુની જુદી જુદી સ્થિતિ

આગળ ટપકું કરો. એ શિરોબિંદુની જુદી જુદી સ્થિતિ બતાવ-

નારાં જેટલાં અને તેટલાં ટપકાં કરો. આ ટપકાંઓ જોડ-

નારી લીટી દોરો. આ લીટી સીધી છે ? “ ના. ” ત્યારે તે

કેવી છે ? “ વાંકી. ” આ વાંકી લીટી અને અબથી થએલી

આકૃતિ વર્તુળના કયા ભાગને મળતી આવે છે ? “ અર્ધ-

વર્તુળને. ”

બે આપેલાં બિંદુઓને જે કાટખુણાઓની બાજુઓ સ્પર્શ કરે તેમનાં શિરોબિંદુથી બનતો માર્ગ શોધી કાઢવા માટે ઉપલા પ્રયોગ ઉપરથી કઈ રીત ઉપજવી શકીએ છીએ ?

ઉપલા પ્રયોગમાં શિરોબિંદુઓનો માર્ગ દર્શાવનારી લીટીમાં એક ઢ બિંદુ લો. અબને કમાં દુભાગો. કડ સાંધો. કડને અબ સાથે સરખાવો. શું માલમ પડે છે ? (પુ.).

આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી કર્ણ સાથે કયા પ્રમાણમાં હોય છે, તે સંબંધી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ? “ આ લીટી કર્ણના અર્ધ બરોબર હોય છે. ”

એક અબ લીટી લો. એક ૬૦° ના

ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ તેના પર બની

શકે તેટલી જુદી જુદી સ્થિતિમાં

ગોઠવો, એવી રીતે કે ૬૦° નો ખુણો


કરનારી ત્રિકોણમાપની બાજુઓ અ, બ

પર પડે. એ ખુણાનાં શિરોબિંદુ જ્યાં જ્યાં પડે ત્યાં આગળ



ટપકાંની નિશાની કરો. આ ટપકાંઓ જોડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સીધી છે ? “ ના. ” આ લીટી અબ સાથે કેવી આકૃતિ બનાવે છે ? “ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો વર્તુળખંડ.”

જુદા જુદા ખુણાઓ દર્શાવનાર કાગળના કકડાઓ લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. ઉપર દર્શાવાએલો કયો સામાન્ય નિયમ આ અને ઉપલા પ્રયોગથી સાબીત થાય છે ?



“ ” આ પ્રયોગો નીચેલો નિયમ પણ સિદ્ધ કરે છે એવું જોવામાં આવશે.

જો એક સીધી લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુ પર દોરેલી બે લીટીથી થતો ખુણો તેજ બે છેડામાંથી તેજ બાજુ પર દોરેલી બીજી બે લીટીથી બનતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે છેડા અને પહેલા ખુણાના શિરોબિંદુમાં થઈ જતું વર્તુળ બીજા ખુણાના શિરોબિંદુમાં થઈને પણ પસાર થશે.

૧૦. ચક્રીય* ચતુષ્કોણો.

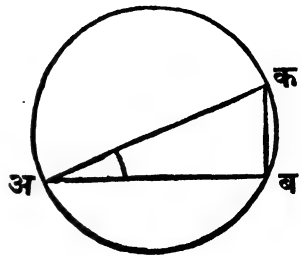
એક વર્તુળમાં એક ગમે તેવો ચતુષ્કોણ દોરો. એના સામ-સામેના ખુણાઓ માપો, અને બંનેના માપનો સરવાળો કરો. સરવાળો કેટલો થયો ? (પુ૦). આ પરથી ચક્રીય ચતુષ્કોણોના સામસામેના ખુણાઓ સંગ્રંધી કયો નિયમ કાઢી શકો છો ?

“ તેઓ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે. ”

એક અબકક ચતુષ્કોણ એવો કાઢો કે તેનો અ ખુણો+ક ખુણો બે કાટખુણા બરાબર હોય. અ,બ,કમાંથી જનારું વર્તુળ દોરો. વર્તુળ ઢમાંથી પસાર થાય છે કે નહિ ? આ પરથી શું અનુમાન કરો છો ?

* ચક્રીય—જેનાં સર્વ શિરોબિંદુઓ વર્તુળના પરિઘ પર પડે એવા.

ધારો કે અબ લીટી પર એવો વર્તુળખંડ દોર્યો છે. આપેલો ખુણો સાંકડો ખુણો છે, તેથી આ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો હોવો જોઈએ. માટે મધ્યબિંદુ અને આખો



વ્યાસ આ વર્તુળખંડમાં હોવાં જોઈએ. અને મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી પરિધ સુધી લંબાવો. ધારો કે આ પ્રમાણે અક એ વ્યાસ દોરાયો. કબ સાંધો. હવે અક વ્યાસ છે, માટે અબક ખુણો ૯૦° નો છે.

$\therefore \angle અકબ =$ આપેલો ખુણો,

$\therefore \angle બઅક =$ આપેલા ખુણાનો કોટિખુણો.

આ પરથી જે વર્તુળની જ્યા અબ અને તે જ્યા વડે થતા એક વર્તુળખંડમાંનો ખુણો આપ્યાં હોય, તે વર્તુળનો વ્યાસ શોધી કાઢવા માટે કયો નિયમ નીકળે છે ?

“અબ જ્યાને એક છેડે આપેલા ખુણાના કોટિ-ખુણા જેવડો એક ખુણો કરો, અને બીજે છેડે એક લંબ દારો. આ લીટીઓ મળવાથી જે કાટખુણ ત્રિકોણ થાય છે, તેનો કર્ણ એ માગેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે. આ કર્ણનું મધ્યબિંદુ શોધી કાઢો. એજ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.”

હવે, જો આપેલો ખુણો સાંકડો ખુણો ન હોય તો કેમ કરવું તેનો વિચાર કરીએ.

જો આપેલો ખુણો કાટખુણો હોય, તો તો ખુલ્લુંજ છે કે અબને વ્યાસ તરીકે લઈ માગેલું વર્તુળ દોરી શકાશે.

જો આપેલો ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો આપેલા ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો (આ અલગત સાંકડો ખુણોજ હોવો જોઈએ) જે વર્તુળખંડમાં હોય એવો એક વર્તુળખંડ અબની

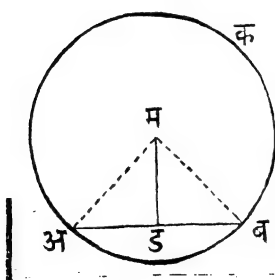
ખીજી (નીચેની) બાજુએ દોરવાથી અબની સામેની (ઉપલી) બાજુએ આવેલો વર્તુળનો બાકીનો ભાગ આપેલા ખુણાવાળો વર્તુળખંડ થઈ રહેશે. માટે ઉપર બતાવેલી રીત પ્રમાણે અબની નીચલી બાજુએ એવો એક વર્તુળખંડ દોરવો.

પ્રકરણ ૨.

પ્રમેય ૩૧.

(૧) જો વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી લીટી મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાને દુભાગ-તી હોય, તો તે જ્યા પર લંબ હોય છે; અને

(૨) વ્યત્યાસ—જો મધ્યબિંદુમાંથી દારેલી લીટી જ્યા પર લંબ રૂપે પડતી હોય, તો તે જ્યાને દુભાગે છે.



પક્ષ—અબક વર્તુળના મધ્યબિંદુ મને અબ જ્યાના મધ્ય-બિંદુ ડ સાથે સાંધનારી મડ લીટી છે.

સાધ્ય—મડ લીટી અબ પર લંબ છે.

રચના—મઅ તથા મવ સાંધો.

સિદ્ધતા—∴ મઅડ ને મવડ ત્રિકોણોમાં,

મઅ=મવ.

(ત્રિજ્યા)

મહ સામાન્ય છે;

અહ=વહ.

(પક્ષ)

∴ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર૦ ૧૪)

∴ \angle મહઅ= \angle મહવ.

∴ મહ લીટી અવ પર લંબ છે.

(૨) વ્યત્યાસ:—

પક્ષ—અવક વર્તુળના મધ્યબિંદુ મમાંથી અવ પર મહ લંબ દોરેલો છે.

સાધ્ય—અહ=વહ.

રચના—મઅ, મવ સાંધો.

સિદ્ધતા—∴ મઅહ ને મવહ ત્રિકોણોમાં,

મહઅ ને મહવ કાટખુણા છે,

(પક્ષ)

મઅ કર્ણ = મવ કર્ણ,

(ત્રિજ્યા)

મહ લીટી સામાન્ય છે,

∴ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર૦ ૧૫)

∴ અહ = વહ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જ્યાને દુભાગનાર લંબમાં (અથવા તેને લંબાવેલા ભાગમાં) વર્તુળનું મધ્યબિંદુ હોય છે.

૩૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળમાંની જ્યાઓને દુભાગનાર લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને તે બિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨. વર્તુળમાંની સમાંતર જ્યાઓમાંની એકને દુભાગનાર લંબ ખીણ જ્યાઓને દુભાગે છે, અને તેમના પર પણ લંબ છે.

૩. સમાંતર જ્યાઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી તેમના પર લંબ છે, અને તે (જરૂર પડે લંબાવવાથી) મધ્ય-બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૪. જે લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાંને દુભાગે છે, પણ તેના પર લંબ નથી, તે વર્તુળના મધ્ય-
બિંદુમાં થઈને જતી નથી. (૨) જે લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુ-
માં થઈને ન જનારી જ્યાં પર લંબ છે, પણ તેને દુભાગતી
નથી, તે વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જતી નથી. (૩) જે
વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી લીટી વર્તુળના મધ્ય-
બિંદુમાં થઈને ન જનારી જ્યાંને દુભાગતી ન હોય, તો તે
જ્યાં પર લંબ નથી. (૪) જે વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને
જનારી લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને ન જનાર જ્યાં
પર લંબ ન હોય, તો તે જ્યાંને દુભાગશે નહિ.

૫. જેમાંથી એકે જ્યાં વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જતી
નહિ હોય, તો તે એક બીજીને દુભાગશે નહિ.

૬. જે એક લીટી જે સમકેન્દ્ર વર્તુળોને છેદતી હોય, તો તે
લીટીના બંને વર્તુળો વચ્ચે પડતા ગાળાઓ બરાબર હોય છે.

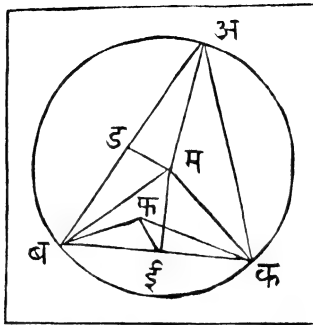
૭. જે વર્તુળોના ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી તેમનાં
મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર એક લીટી બંને
પરિધિને અડકતાં સુધી દોરવામાં આવે, તો સાબીત કરો કે
તે લીટી મધ્યબિંદુને સાંધનાર લીટી કરતાં બમણી છે.

૮. એક બહારના બિંદુ અમાંથી એક વર્તુળના પરિધિ
સુધી અથવા અને અક જો સરખી લીટીઓ દોરેલી છે; તો
બતાવી આપો કે અથવા બીજાને દુભાગનારી લીટી મધ્ય-
બિંદુમાં થઈને જાય છે.

૯. અથવા સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ
એક વર્તુળના પરિધિ પર પડે છે; તો બતાવી આપો કે અક,
અથવા તે વર્તુળના બાહ્ય છે.

પ્રમેય ૩૨.

એક જ સીધી લીટીમાં ન હોય એવાં ત્રણ બિંદુઓ-
માં થઈને જાય એવું એક જ વર્તુળ દોરી શકાય.



પક્ષ—ત્રણ ખિંદુઓ અ, બ, ક એકજ સીધી લીટીમાં નથી.

સાધ્ય—અ, બ, કમાં થઈને જનારે ફક્ત એક વર્તુળ દોરી શકાશે.

સિદ્ધતા—બક સાંધો. બકને ઈ ખિંદુમાં દુભાગો. ઈ ખિંદુમાંથી બક પર લંબ દોરો. એ લંબમાં ગમે તે એક મ ખિંદુ લો. બમ અને કમ સાંધો. હવે,

∴ બઈમ અને કઈમ ત્રિકોણોમાં

બઈ = કઈ, (રચના)

ઈમ બંનેમાં સામાન્ય છે,

બઈમ કાટખુણો = કઈમ કાટખુણો, (રચના)

∴ બઈમ $\triangle \equiv$ કઈમ \triangle , (પ્ર૦ ૧૦)

∴ બમ = કમ.

એટલે કે ઈમમાંનું કોઈ પણ ખિંદુ બ અને કથી સરખે અંતરે છે. હવે આપણે એમ સિદ્ધ કરીએ કે ઈમની બહારનું કોઈ પણ ખિંદુ બ અને કથી સરખે અંતરે હોઈ શકે નહિ. ઉદાહરણ તરીકે, બની શકતું હોય તો ફ ખિંદુ બ અને કથી સરખે અંતરે છે એમ ધારી લો.

ફબ, ફક, અને ફઈ સાંધો. હવે,

∴ બઈફ અને કઈફ ત્રિકોણોમાં,

બર્ફ = કર્ફ,

ઈફ બંનેમાં સામાન્ય છે,

વફ = કફ,

∴ બર્ફ $\triangle \equiv$ કર્ફ \triangle ,

(૫૦ ૧૦)

∴ \angle બર્ફ = \angle કર્ફ

પણ આ અશક્ય છે; માટે બકને દુભાગનાર લંબની બહારનું કોઈપણ બિંદુ બ અને કથી સરખે અંતરે હોઈ શકે નહિ; અર્થાત્ બ અને કથી સરખે અંતરે જેટલાં બિંદુઓ હોઈ શકે તે સઘળાં ફક્ત લંબની અંદરજ હોવાં જોઈએ. એજ પ્રમાણે અ અને વથી સરખે અંતરે જેટલાં બિંદુઓ હોઈ શકે તે (અબ લીટીના ઢ બિંદુમાંથી પસાર થનાર) અબને દુભાગનાર લંબમાંજ હોવાં જોઈએ. ધારો કે આ લંબો મ બિંદુમાં મળે છે. ત્યારે તો અ, બ, ક એ ત્રણે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું તો ફક્ત એક મ બિંદુજ છે.

હવે મઅ = મવ; અને મવ = મક; માટે મ મધ્યબિંદુ લઈને મઅ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ અ, બ, ક:બિંદુઓમાં થઈને પસાર થશે, અને એવું વર્તુળ ફક્ત એકજ દોરી શકાશે.

૩૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક વર્તુળ બીજાને બે કરતાં વધારે બિંદુમાં છેદી શકે નહિ.

૨. વર્તુળના પરિઘ ઉપરનાં બે કરતાં વધારે બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહેનાર બિંદુ તે વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૩. અબકડ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજાને મ બિંદુમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે અબમ, બકમ, કડમ, ડઅમ ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ એક સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ બનાવે છે.

૪. અબક ત્રિકોણમાં પ બિંદુ એવું છે કે તેથી પકઅ ખુણો પઅબ ખુણાની બરાબર અને પઅબ ખુણો પવક

ખુણાની બરોબર થાય છે; તો સિદ્ધ કરો કે પકઅ, પઅબ, પબક ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ જે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે, તે ત્રિકોણ અને અબક ત્રિકોણ પરસ્પર સમકોણ છે.

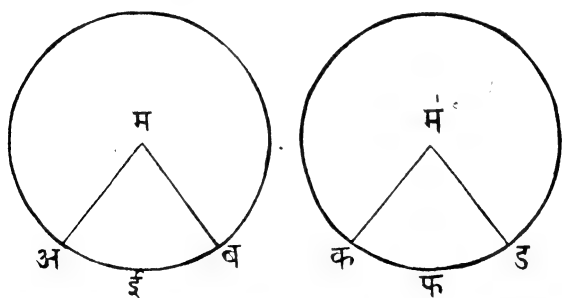
૫. જે એક સીધી લીટીઓવાળા આકૃતિની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળતા હોય, તો તે આકૃતિ ચક્રીય છે.

પ્રમેય ૩૩.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં)

(૧) જે કૌંસોની સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય, તો તે કૌંસો સરખા હોય છે; અને

(૨) જે જે કૌંસો સરખા હોય, તો તેમની સામેના મધ્યકોણો સરખા હોય છે.



પક્ષ—જેનાં મ અને મ' અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે, એવાં જે સરખાં વર્તુળોના અબ અને કઢ કૌંસો છે, અને અમબ ખુણો કમઢ ખુણા બરોબર છે.

સાધ્ય—અબ કૌંસ = કઢ કૌંસ.

સિદ્ધતા—અબ વર્તુળને કઢ વર્તુળ પર એવી રીતે મૂકો,

કે મ બિંદુ મ' પર પડે, અને મઅ લીટી મકની દિશામાં પડે. હવે

∴ મઅ = મ'ક, (સરખાં વર્તુળોની ત્રિજ્યા)

∴ અ બિંદુ ક બિંદુ પર પડે છે.

∴ ∠ અમવ = ∠ કમ'ડ, (પક્ષ)

∴ મવ લીટી મ'કની દિશામાં પડે છે.

∴ ત્રિજ્યાઓ (મવ, મ'ક) સરખી છે,

∴ બ બિંદુ ડ ઉપર પડે છે.

∴ અ, બ બિંદુઓ ક, ડ ઉપર પડે છે, અને વર્તુળો સરખાં છે, તેટલા માટે એક પરિધ બીજા પર પડી રહે છે.

∴ અવ કૌંસ ક'ડ કૌંસ પર પડે છે.

∴ અવ કૌંસ = ક'ડ કૌંસ.

૨. (વ્યત્યાસ).

પક્ષ—અવ કૌંસ = ક'ડ કૌંસ.

સાધ્ય—∠ અમવ = ∠ કમ'ડ.

સિદ્ધતા—અવ વર્તુળને ઉચકીને ક'ડ ઉપર એવી રીતે મૂકવામાં આવે કે મ બિંદુ મ' પર પડે અને મઅ લીટી મ'કની દિશામાં પડે, તો

∴ મઅ = મ'ક, (પક્ષ)

∴ અ બિંદુ ક પર પડે છે;

અને વર્તુળો સમાન છે માટે તેના પરિધ મળે છે; અને

∴ અવ કૌંસ = ક'ડ કૌંસ, (પક્ષ).

∴ બ બિંદુ ડ પર પડે છે, એટલે મવ ને મ'ક લીટીઓ મળે છે.

∴ ∠ અમવ = ∠ કમ'ડ.

૩૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. જો સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) એ કૌંસોની સામેના મધ્યકોણો વિષમ હોય, તો મોટા મધ્યકોણની સામેનો કૌંસ નાના મધ્યકોણની સામેના કૌંસ કરતાં મોટો હોય છે.

૨. જો સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) એક કૌંસની સામેનો મધ્યકોણ બીજા કૌંસની સામેના મધ્યકોણથી અમુકગણો હોય, તો પહેલો કૌંસ બીજા કૌંસથી તેટલાજગણો હોય છે. (અર્થાત્ કૌંસો પોતાની સામેના મધ્યકોણોના પ્રમાણમાંજ હોય છે).

૩. એક વર્તુળના પરિઘ ઉપરના અ બિંદુમાંથી અબ ને અક એ સરખી જ્યાઓ દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે અ બિંદુ આગળ બઅક કૌંસ દુભાગાય છે.

૪. અ બિંદુ બઅક કૌંસનું મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે એ બિંદુ બ અને કમાંથી પસાર થનારી ત્રિજ્યાઓથી સરખે અંતરે છે.

૫. અબ એક વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને તેને સમાંતર એક કડ જ્યા દોરેલી છે. એ કમાંથી બીજો વ્યાસ દોરવામાં આવે, તો સિદ્ધ કરો કે બ બિંદુ ડબઈ કૌંસનું મધ્યબિંદુ છે.

૬. એક વર્તુળના ડફ વ્યાસને અને તેના એક જ્યા ઈગ ને લંબાવતાં તે બંને અમાં મળે છે. હવે જો ગઅ = $\frac{1}{2}$ ડફ હોય, તો સાબીત કરો કે ફગ કૌંસ = $\frac{1}{3}$ ડઈ કૌંસ.

૭. પચ જ્યા અને પર વ્યાસ પરિઘ પરના પ બિંદુમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે પચને સમાંતર દોરેલી ત્રિજ્યા ચર કૌંસને દુભાગે છે.

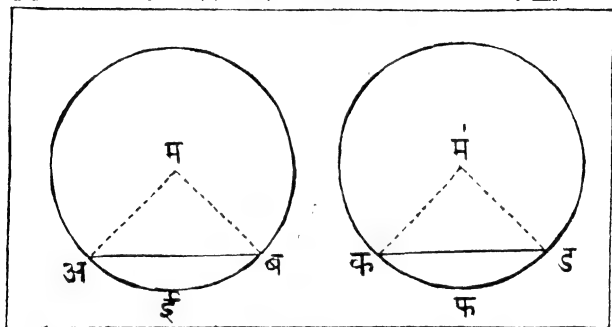
૮. મઅ અને પબ ત્રિજ્યાઓથી સરખે અંતરે પરિઘ પર એક પ બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે અપ કૌંસ = કપ કૌંસ.

પ્રમેય ૩૪.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) —

(૧) જો બે કોણો સરખા હોય, તો તેમની જ્યાઓ સરખી હોય છે.

(૨) જો બે જ્યાઓ સરખી હોય, તો તેમણે કાપી કાઢેલા કોણો સરખા હોય છે.



પક્ષ—મ અને મ' બે સરખાં વર્તુળોનાં અનુક્રમે મધ્ય-બિંદુઓ છે, અને અબ, કડ કોણો સરખા છે.

સાધ્ય—અબ જ્યા = કડ જ્યા.

રચના—અમ, મવ, મ'ક, મ'ડ સાધો.

સિદ્ધતા— \therefore અબ કોણ = કડ કોણ,

$$\therefore \angle અમવ = \angle કમ'ડ. \quad (પ્ર૦ ૩૩)$$

હવે \therefore અમવ અને કમ'ડ ત્રિકોણોમાં—

મઅ = મ'ક, (સરખાં વર્તુળોની ત્રિજ્યા)

મવ = મ'ડ, (")

અને $\angle અમવ = \angle કમ'ડ$;

$$\therefore અબ = કડ \quad (પ્ર૦ ૧૦)$$

(૨) પક્ષ—અબ જ્યા = કડ જ્યા.

સાધ્ય—અબ કૌંસ = કહ કૌંસ.

સિદ્ધતા—∴ અમબ અને કર્મહ ત્રિકોણોમાં—

મઅ=મક;

મબ=મહ;

અબ=કહ;

(પક્ષ)

∴ \angle અમબ = \angle કર્મહ (પ્ર૦ ૧૪)

∴ અબ કૌંસ = કહ કૌંસ. (પ્ર૦ ૩૩)

વ્યાખ્યા—એ ત્રિજ્યા અને તેમની વચમાં આવેલા કૌંસ વડે જે આકૃતિ થાય છે તેને ‘વર્તુળવિભાગ’ કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) સરખા કૌંસો અથવા સરખી જ્યાઓ વડે બનેલા વર્તુળવિભાગો અને વર્તુળખંડો સરખા હોય છે.

૩૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. જે વર્તુળની અંદર કાઢેલા ચતુષ્કોણની બે સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે ચતુષ્કોણના કોણો સરખા હોય છે.

૨. એક વર્તુળના અબ કૌંસને કમાં દુભાવ્યો છે; તો બતાવી આપો કે અબ જ્યા અકના બમણા કરતાં ઓછી છે.

૩. એક વર્તુળના અબ કૌંસને કમાં દુભાગો, અબ જ્યાના અર્ધ બરોબર અહ જ્યા કાઢો, અને બતાવી આપો કે અહ કૌંસ અક કૌંસ કરતાં નાનો છે.

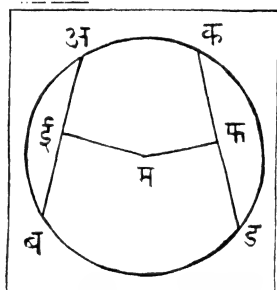
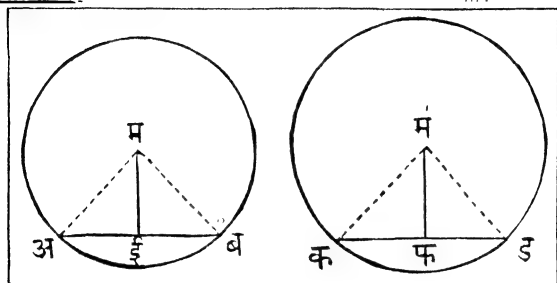
૪. વર્તુળનો પરિધ વ્યાસના ત્રણગણા કરતાં મોટો હોય છે, એ સત્ય વર્તુળમાં એક બીજ સાથે ૬૦° નો ખુણો કરનારી ત્રિજ્યાઓ એક પછી એક દોરીને સાખીત કરો.

પ્રમેય ૩૫.

સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં)—

(૧) સરખી જ્યાઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે;

(૨) મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે આવેલી જ્યાઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—જે સરખાં વર્તુળો અથવા અન્ય કડનાં મ અને મ' મધ્યબિંદુઓ છે. (આકૃતિ ૧ અને ૨ જુઓ). અથવા અન્ય કડ જ્યાઓ સરખી છે. મઈ ને મ'ફ અનુક્રમે અથવા અન્ય કડ ઉપર લંબ છે.

સાધ્ય—મઈ = મ'ફ

સિદ્ધતા—∴ મઈ લીટી અથવા પર લંબ છે,

∴ અઈ = $\frac{1}{2}$ અથ.

(પૃ ૩૧)

એજ પ્રમાણે કફ = $\frac{1}{2}$ કડ.

(પૃ ૩૧)

પરંતુ અવ=કડ,

∴ અઈ=કફ.

હવે, અમઈ અને કર્મફ એ કાટખુણુ ત્રિકોણોમાં—

અમ કર્ણ = કર્મ કર્ણ; અને

અઈ બાણુ = કફ બાણુ;

∴ \triangle અમઈ \equiv \triangle કર્મફ (પ્ર૦ ૧૫).

∴ મઈ = મફ.

(૨) વ્યત્યાસ—

પક્ષ—મઈ લંબ = મફ લંબ.

સાધ્ય—અવ=કડ.

સિદ્ધતા—∴ અમઈ અને કર્મફ કાટખુણુ ત્રિકોણોમાં—

અમ કર્ણ = કર્મ કર્ણ;

મઈ બાણુ = મફ બાણુ;

∴ \triangle અમઈ \equiv \triangle કર્મફ (પ્ર૦ ૧૫)

∴ અઈ=કફ.

પરંતુ ૨ અઈ=અવ, અને ૨ કફ=કડ; (પ્ર૦ ૩૧)

∴ અવ=કડ.

૩૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એકજ વર્તુળમાં બે સરખી અને સમાંતર જ્યાઓને તે વર્તુળનો કોઈ પણ વ્યાસ જે બિંદુઓમાં છેદતો હોય, તે બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે.

૨. બે સમકેન્દ્ર વર્તુળોમાંના બહારના વર્તુળમાં બે સરખી જ્યાઓ છે. જો આ જ્યાઓ અંદરના વર્તુળને છેદતી હોય, તો બતાવી આપો કે આ જ્યાઓના નાના વર્તુળમાં આવેલા ભાગો સરખા છે.

૩. વ્યાસના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી

પસાર થનારી અને વ્યાસ સાથે સરખા ખુણા કરનારી જ્યાંઓ સરખા હોય છે.

૪. ઉપલા પ્રશ્નનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૫. જે સરખાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર હોય એવી જેઉ વર્તુળોને છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો વર્તુળોમાં પડતા તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૬. જે જે સરખાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીના મધ્યબિંદુમાં થઈને જનારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો વર્તુળોમાં પડતા તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૭. જે એક વર્તુળની જે સરખી જ્યાંઓના મધ્ય-બિંદુઓને જોડનારી લીટીને બંને તરફ પરિધ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો જ્યાંઓ અને પરિધ વચ્ચેના તે લીટીના ભાગો સરખા હોય છે.

૮. વર્તુળમાં એક જ્યાં આપેલી છે, અને તેના કોઈ પણ વ્યાસના બે છેડાઓમાંથી તેના પર લંબો પાડેલા છે; તો બતાવી આપો કે જે વ્યાસ જ્યાંને છેદતો હોય તો લંબોની બાદબાકી, અને જે વ્યાસ જ્યાંને ન છેદતો હોય તો લંબોનો સરવાળો નિત્ય છે. (નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧, પરચુરણ પ્રશ્નો ૬૨, ૬૩ જુઓ).

૯. વર્તુળના પરિધના અંતર્વક્ર ભાગ સુધી કોઈ બહારના બિંદુમાંથી દોરેલી જે લીટીઓ સરખા હોય, તો તે લીટીઓના અહિર્વક્ર પરિધ પર્યંતના ભાગો સરખા હોય છે.

૧૦. એક આપેલા વર્તુળમાં—

(૧) એક આપેલી જ્યાં બરોબરની સમાંતર જ્યાં દોરો;

(૨) એક આપેલી જ્યાં બરોબરની અને તેના પર લંબરૂપે પડનારી જ્યાં દોરો;

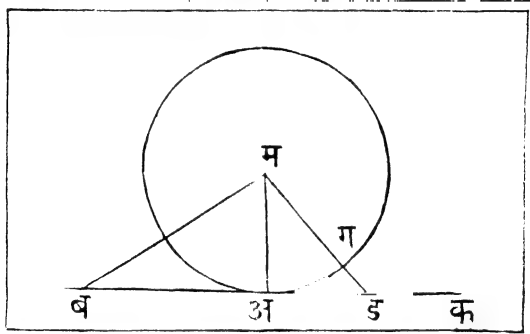
(૩) એક આપેલી જ્યાં બરોબરની અને એક આપેલી લીટીને સમાંતર જ્યાં દોરો.

૧૧. મધ્યબિંદુથી વત્તેઓછે અંતરે આવેલી જ્યાઓમાંથી જે મધ્યબિંદુની વધારે નજદીક હોય છે, તે દૂરની કરતાં મોટી હોય છે.

૧૨. વર્તુળમાંના મધ્યબિંદુ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુમાંથી પસાર થતી સઘળી જ્યાઓમાં, તે બિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ પર લંબ હોનારી જ્યા નાનામાં નાની હોય છે.

પ્રમેય ૩૬.

સ્પર્શલીટીના સ્પર્શબિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા સ્પર્શલીટી પર લંબ હોય છે.



પક્ષ—વક સ્પર્શલીટી છે; અ સ્પર્શબિંદુ છે; અને, અમ સ્પર્શબિંદુમાંથી જનારી ત્રિજ્યા છે.

સાધ્ય—અમ ત્રિજ્યા વક પર લંબ છે.

સિદ્ધતા—જો અમ લીટી વક પર લંબ ન હોય, તો મ માંથી વક ઉપર મહ લંબ દોરો.

સ્પર્શબિંદુ સિવાયનાં સ્પર્શલીટીનાં સઘળાં બિંદુઓ પરિધની બહાર હોય છે, (વ્યાખ્યા)

∴ ક બિંદુ પરિધની બહાર છે, માટે મહ લીટી પરિધને છેદીને જશે. ધારો કે તે પરિધને કામાં છેદે છે. હવે,

∴ મહ લંબ છે અને મક તિર્થક છે (લંબ નથી),

∴ મઅ > મહ.

(પ્ર૦ ૨૧)

પરંતુ મઅ = મગ,

(ત્રિજ્યા)

∴ મગ > મહ.

આ અશક્ય છે. માટે અકને મળવાને મમાંથી દોરેલી મઅ સિવાયની કોઈ પણ લીટી લંબ હોઈ શકે નહિ.

માટે મઅ લીટી મઅ પર લંબ છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. પરિધ ઉપરના કોઈ પણ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી એકજ સ્પર્શલીટી દોરી શકાય.

(ધારો કે અ બિંદુ આગળ બે જુદી જુદી સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે. પ્રમેય ૩૬ પ્રમાણે આ બંને સ્પર્શલીટીઓ મઅ ત્રિજ્યા પર એકજ બાજુએ લંબ થાય; પણ તે અશક્ય છે, માટે એવી બે સ્પર્શલીટીઓ દોરી શકાય નહિ).

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સ્પર્શલીટી પર સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી સ્પર્શલીટી પર દોરેલો લંબ સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

૩૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળના વ્યાસના છેડાઓમાંથી જતી સ્પર્શલીટીને સમાંતર જેટલી જ્યાંઓ દોરવામાં આવે તે સઘળીને વ્યાસ લંબરૂપે દુભાગે છે.

૨. બે સમકેંદ્ર વર્તુળોમાંથી અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બહારના વર્તુળની સઘળી જ્યાંઓ સરખી હોય છે, અને સ્પર્શબિંદુમાં દુભાગાય છે.

૩. પર વ્યાસ છે, અને પચ જ્યાં છે; રપચ ખુણાને પસ દુભાગે છે, અને પસ વર્તુળને સમાં મળે છે; તે બતાવી આપો કે સ બિંદુ આગળની સ્પર્શલીટી પર પચ લંબ છે.

૪. વ્યાસના છેડાઓમાંથી જતી સ્પર્શલીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૫. સમાંતર સ્પર્શલીટીઓનાં સ્પર્શબિંદુઓને સાંધનારી લીટી વ્યાસ છે.

૬. બે સમકેન્દ્ર વર્તુળ એવી રીતે કાઢો, કે અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બહારના વર્તુળની બ્યા અંદરના વર્તુળના વ્યાસ બરાબર થાય.

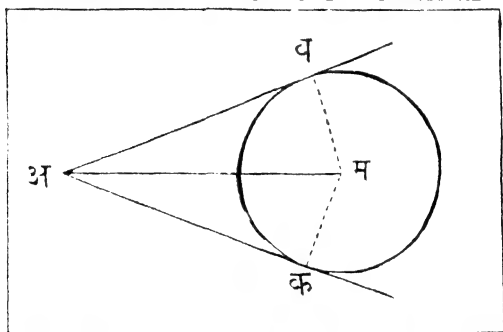
પ્રમેય ૩૭.

જો કોઈ બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે લીટીઓ દોરવામાં આવે, તો

(૧) તેઓ સરખી હોય છે;

(૨) તેમની સામેના વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય છે;

(૩) આપેલા બિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સાથે તેઓ સરખા ખુણા કરે છે.



પદ્ય—મ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને એક બહારના બિંદુ અમાંથી અવ અને અક બે સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે.

સાધ્ય—(૧) અવ = અક;

(૨) \angle અમવ = \angle અમક;

(૩) \angle વઅમ = \angle કઅમ.

સિદ્ધતા—∵ વ અને ક આગળ અવ, અક સ્પર્શ કરે છે,

∴ અવમ ને અકમ બંને કાટખુણા છે. (પ્ર૦ ૩૬)

હવે ∴ અવમ ને અકમ બે કાટખુણ ત્રિકોણોમાં—

મવ બાબુ=મક બાબુ; (ત્રિજ્યા)

અમ કર્ણ બંનેમાં સામાન્ય છે;

∴ એ બંને ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૫)

∴ અવ=અક;

∠અમવ=∠અમક;

અને ∠વઅમ=∠કઅમ.

૩૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને વર્તુળ બહારના એક અ બિંદુમાંથી દોરેલી અવ ને અક લીટીઓ તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે ∠વઅક + ∠વમક=બે કાટખુણા.

૨. બે વર્તુળોની સામસામી બાબુએ આવેલી સામાન્ય* સ્પર્શલીટીઓ સરખી હોય છે.

૩. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા કોઈ પણ ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાબુઓની જોડનો સરવાળો બીજી બે બાબુઓના સરવાળા બરાબર હોય છે.

૪. ઉપલા પ્રશ્નનો વ્યત્યાસ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૫. જો કોઈ વર્તુળની આસપાસ બેકી સંખ્યાવાળી બાબુઓની સીધી લીટીની આકૃતિ દોરવામાં આવે, તો એક છોડીને બીજી એમ લીધેલી લીટીઓનો સરવાળો બાકીની લીટીઓના સરવાળા બરાબર હોય છે.

૬. બે સમાંતર સ્પર્શલીટીઓ એક ત્રીજી સ્પર્શલીટીને વ અને ચ બિંદુઓમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે વચ મધ્યબિંદુ સાથે કાટખુણો કરે છે.

* જો વર્તુળોની સામાન્ય સ્પર્શલીટીની લંબાઈ એટલે જો સ્પર્શ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર.

૭. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજાને મધ્યબિંદુ આગળ છેદે છે.

૮. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમબાજુ ચતુષ્કોણની (રોમ્બસની) સામસામેની બાજુઓના સ્પર્શબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૯. જો વર્તુળની આસપાસ એક કાટખુણુ ચોખુણુ દોરવામાં આવે, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૦. વર્તુળની આસપાસ દોરેલા ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ મધ્યબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે, તે ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૧૧. કોઈ પણ જ્યાં પોતાના છેડાઓમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૧૨. જો બે વર્તુળો એક બીજાને છેદતાં હોય, તો છેદનબિંદુઓ આગળ વર્તુળોની સ્પર્શલીટીઓથી થતા ખુણાઓ સરખા હોય છે.

૧૩. આપેલી જ્યાંના છેડાઓમાંથી દોરેલી બંને સ્પર્શલીટીઓ તે જ્યાંની બરોબર હોય, તો સ્પર્શલીટીઓ વચ્ચેના ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ, અને તે જ્યાં વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જે ખુણો કરે તે કેવડો હોવો જોઈએ ?

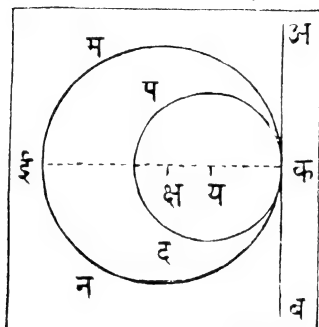
૧૪. એક વર્તુળની બહારના બિંદુ પ માંથી પચ્ચ, પર બે સ્પર્શલીટીઓ દોરેલી છે, અને ચસ બ્યાસ છે; તો બતાવી આપો કે ચપર ખુણો રચસથી બમણો છે.

૧૫. વર્તુળની આસપાસ દોરેલી બહુકોણ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ તે આકૃતિની પરિમિતિના ને વર્તુળની ત્રિજ્યાના ગુણાકારનું અર્ધ હોય છે.

૧૬. બે સમકેન્દ્ર વર્તુળોમાંના બહારનામાં દોરેલી પર ને પચ્ચ જ્યાંઓ અંદરના વર્તુળને સ અને ટમાં સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે સટ = $\frac{1}{2}$ ચર.

પ્રમેય ૩૮.

જે બે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં હોય, તે સ્પર્શબિંદુ તેમનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી પર હોય છે.



પ્રકાર ૧.—

પક્ષ—કમન અને કપદ વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી ક બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે, અને ક્ષ તથા ય તેમનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

સાધ્ય—ક્ષય લીટીને લંબાવતાં તે કમાંથી પસાર થાય છે.

સિદ્ધતા—(ધારો કે ક બિંદુમાંથી જનારી બંને વર્તુળોની સામાન્ય સ્પર્શલીટી અબ છે. ક્ષક, યક સાંધો).

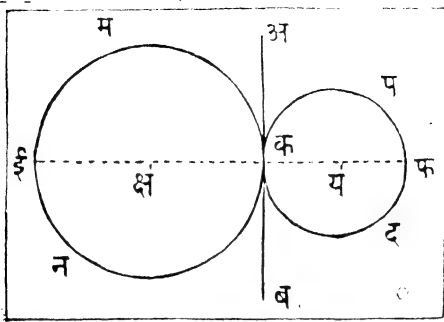
∴ અક સ્પર્શલીટી છે અને ક્ષક ત્રિજ્યા છે,

∴ અકક્ષ ખુણો કાટખુણો છે.

એજ કારણથી અકય પણ કાટખુણો છે.

∴ કક્ષ અને કય, અક સાથે તેની એકજ બાજુએ કાટખુણા કરે છે,

∴ કયક્ષ એકજ લીટી છે; એટલે કે ક્ષય લીટી ક બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.



પ્રકાર ૨.—

પક્ષ—કમન ને કવદ વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને ક્ષ, ય તેનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

સાંધ્ય—ક્ષ ને ય બિંદુઓને જોડનારી લીટી કમાંથી જાય છે.

સિદ્ધતા—(પહેલા પ્રકારમાં કરી હતી તેવી રચના કરીને)

∴ \angle અકક્ષ = ૧ કાટખુણો; અને

\angle અકય = ૧ કાટખુણો.

∴ \angle અકક્ષ + \angle અકય = ૨ કાટખુણો.

∴ ક્ષકય એકજ સીધી લીટી છે. (પ્ર૦ ૨)

સૂચના—અકબ સ્પર્શલીટીમાંના ક સ્પર્શબિંદુમાંથી એક લંબ દોરીને તથા ૩૬મા પ્રમેયનો બીજો ઉપસિદ્ધાંત લાગુ પાડીને આ પ્રમેય બીજી રીતે સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—જો બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરતાં હોય, તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓના સરવાળા બરોબર હોય છે; અને જો તેઓ એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરતાં હોય, તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓની બાદબાકી બરોબર હોય છે.

૩૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. જે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે. જે સ્પર્શબિંદુ-માંથી એક લીટી બંને વર્તુળોને છેદે એમ દોરીએ, તો છેદનબિંદુઓમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યાઓ સમાંતર હોય છે.

૨. જે જે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે, તો તેમના સમાંતર વ્યાસોના વ્યુત્ક્રમ છેડાઓ (છેડાના બિંદુઓ) અને સ્પર્શબિંદુ એક સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. જે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરે છે, અને સ્પર્શ-બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને છેદનારી એક લીટી વર્તુળોના પરિઘ સુધી દોરવામાં આવી છે; તો આ લીટીના છેડાઓ આગળ દોરેલી વર્તુળની સ્પર્શલીટીઓ સમાંતર છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. જે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને સ્પર્શબિંદુમાંથી એક લીટી પરિઘોને મળતાં સુધી દોરવામાં આવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે બંને વર્તુળોનાં સ્પર્શ-બિંદુ આગળ આ લીટી દુભાગાય છે.

૫. જે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને ત્રીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરે છે. જે આ વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ-ને જોડનારી લીટીઓથી ત્રિકોણ થતો હોય તો બતાવી આપો કે એ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રીજા વર્તુળના વ્યાસની બરાબર છે.

૬. જે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે ન ને મ છે; તેઓ એક બીજાને બહારથી અ આગળ સ્પર્શ કરે છે, અને એક સાધારણ સ્પર્શલીટી તેમને ઘ અને ક બિંદુઓમાં સ્પર્શ કરે છે. ઘનક ને કમઝ વ્યાસો છે; તો બતાવી આપો કે ઘઝ ને કઝ એક બીજાને અ બિંદુમાં છેદે છે.

૭. જે વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી અથવા બહારથી સ્પર્શ કરે છે. આ બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ એક

ખીજીને સમાન્તર દોરવામાં આવી છે. જો આ સ્પર્શલીટીઓનાં સ્પર્શબિંદુઓને અને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુને જોડવામાં આવે, તો બતાવી આપો કે આ બિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ એક સીધી લીટી બનાવે છે, અથવા તો એક ખીજીને કાટખુણે છે.

૮. મ અને ન બે સરખાં વર્તુળો, જે એક ખીજીને બહારથી ર બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે, તેનાં મધ્યબિંદુઓ છે. પ્રત્યેક વર્તુળમાં એક ખીજી સાથે કાટખુણે કરનારી રસ અને રટ એમ એક એક જ્યાં દોરવામાં આવી છે. સાબીત કરો કે સટ લીટી મનની બરોબર અને તેને સમાંતર છે.

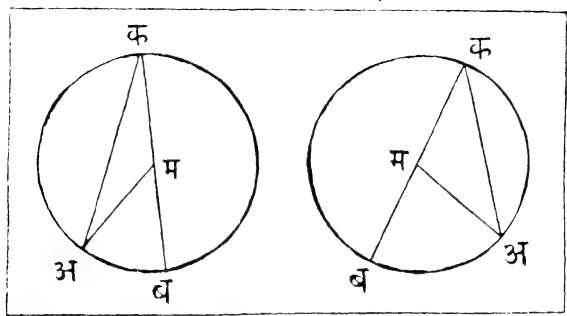
૯. બે સરખાં વર્તુળો એક ખીજીને અ અને બમાં છેદે છે. મ મધ્યબિંદુવાળું એક ત્રીજું વર્તુળ આ બંને વર્તુળોને બહારથી સ્પર્શ કરે છે. સાબીત કરો કે અ, બ, મ સીધી લીટીમાં છે.

૧૦. ત્રણ વર્તુળો એક ખીજીને અ, બ, ક આગળ બહારથી સ્પર્શ કરે છે. ત્રીજા વર્તુળને અનુક્રમે મ અને નમાં ફરીથી છેદે એમ અબ ને અકને લંબાવવામાં આવે છે. સિદ્ધ કરો કે મન ખીજાં બે વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સમાંતર છે.

૧૧. જુદા જુદા વ્યાસના ચાર વર્તુળાકાર સિક્કાઓ મેજ પર મૂકેલા છે, અને તે સિક્કાઓમાંથી દરેક ખીજા બેને સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે સિક્કાઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી થતા ચતુષ્કોણમાં વર્તુળ દોરી શકાશે.

પ્રમેય ૩૯.

કોઈ પશ્ચ કૌંસ પરનો મધ્યકોણ તેજ કૌંસ પરના ગમે તે પરિધિકોણ કરતાં બમણો હોય છે.



પક્ષ—મ મધ્યબિંદુવાળા વર્તુળનો અંક કૈંસ છે. અંક પર અમંબ ખુણો મધ્યકોણ છે; અને બાકી રહેલા પરિધના ભાગ પરના કોઈ પણ ક બિંદુ આગળ અંકબ પરિધકોણ છે.

સાધ્ય— \angle અમંબ = ૨ \angle અંકબ.

જ્યારે કૈંસ સામેનો મધ્યકોણ બહિર્વક્ર ન હોય, ત્યારે મધ્યબિંદુ મ (૧) કૈંસ સામેના પરિધકોણના કઅ કે કબ લુજમાં, અથવા (૨) આ ખુણાના બે લુજોની વચમાં, અથવા (૩) આ ખુણાના લુજોની બહાર હોઈ શકે. આ પ્રમાણે આ પ્રમેયના ત્રણ પ્રકાર પડશે.

પ્રકાર ૧—(ધારો કે મ બિંદુ એક કબ લુજમાં છે).

\therefore મક = મઅ; (ત્રિજ્યા)

$\therefore \angle$ મઅક = \angle મકઅ; (પૃ ૧૨)

$\therefore \angle$ મઅક + \angle મકઅ = ૨ \angle મકઅ.

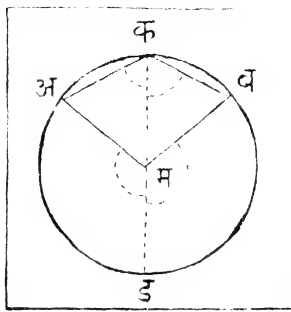
પરંતુ \angle મઅક + \angle મકઅ = બહારનો ખુણો અમંબ;

(પૃ ૮. ઉ ૨)

$\therefore \angle$ અમંબ = ૨ \angle મકઅ.

= ૨ \angle અંકબ.

$\therefore (\angle \text{વમડ} - \angle \text{અમડ}) = ૨ (\angle \text{વકમ} - \angle \text{અકમ});$
 એટલે $\angle \text{અમવ} = ૨ \angle \text{અકવ}.$



[જ્યારે મધ્યકોણ બહિર્વક હોય (જુઓ ઉપલી આકૃતિ), ત્યારે બીજા પ્રકાર જેવીજ સિદ્ધતા થશે].

ઉપસિદ્ધાંત—એકજ અથવા સરખા કૌંસ પરના સઘળા પરિધકોણો સરખા હોય છે.

૩૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. સરખાં વર્તુળોમાં (અથવા એકજ વર્તુળમાં) જે કૌંસ પરના પરિધકોણો સરખા હોય તે કૌંસો સરખા હોય છે.

૨. એકજ વર્તુળમાં સમાંતર જ્યાંઓ વચ્ચેના કૌંસો સરખા હોય છે.

૩. એક વર્તુળમાં અવ, હક જ્યાંઓ સરખી છે; તો સાબીત કરો કે અવકહ ચતુષ્કોણની અહ બાજુ બકને સમાંતર છે.

૪. એક વર્તુળમાં અવ, હક જ્યાંઓ સરખી છે; તો ખતાવી આપો કે અક=વહ.

૫. કોઈ પણ વર્તુળમાં એક બીજાને છેદનારી બે જ્યાંઓ વચ્ચેનો ખુણો તે બે જ્યાંઓની વચ્ચે આવેલા કૌંસોની સામેના પરિધકોણોના સરવાળા બરાબર હોય છે.

૬. મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને તેની અવ, કડ ન્યાઓ એક બીજીને ર્દમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે \angle અમક + \angle બમડ = ૨ \angle અર્દક.

૭. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજીને અ, બમાં છેદે છે. અમાંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે ક અને ડમાં છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવી છે; તો બતાવો કે વક=બડ.

૮. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજીને અ, બમાં છેદે છે. અમાંથી કઅડ અને ર્દઅફ ગમે તે બે લીટીઓ વર્તુળના પરિઘો સુધી દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે કર્દ=ડફ.

૯. અવક ત્રિકોણમાં કાઢેલું વર્તુળ ત્રિકોણની અવ બાજુને ડમાં, વકને ર્દમાં, અને કઅને ફમાં સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે ડફર્દ ત્રિકોણનો કોઈ પણ ખુણો અને તે ખુણાની સામેના અવક ત્રિકોણના ખુણાનું અર્ધ મળીને એક કાટખુણા બરાબર થાય છે.

૧૦. અવક ત્રિકોણની આસપાસ એક વર્તુળ દોરેલું છે, અને અડ લીટી અ ખુણાને દુભાગે છે અને વર્તુળને ડ બિંદુમાં મળે છે. ડમાંથી અવ અને અક ઉપર અનુક્રમે ડર્દ ને ડફ લંબો દોરવામાં આવેલા છે; તો સાબીત કરો કે અર્દ = $\frac{1}{2}$ (અવ+અક).

૧૧. અવકઅ એક ચોરસ છે. વ અને ક મધ્યબિંદુઓ લઈને વક ત્રિજ્યાએ વર્તુળો દોર્યા છે, જે એક બીજીને ર્દમાં છેદે છે; તો \angle વડર્દ = $\frac{1}{2}$ કાટખુણો.

૧૨. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજીને અ અને બમાં છેદે છે, અને એક બીજીનાં મધ્યબિંદુઓમાં થઈને પસાર થાય છે. અમાંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે ક અને ડ બિંદુઓમાં છેદનારી એક લીટી દોરેલી છે; તો બતાવી આપો કે કડવ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

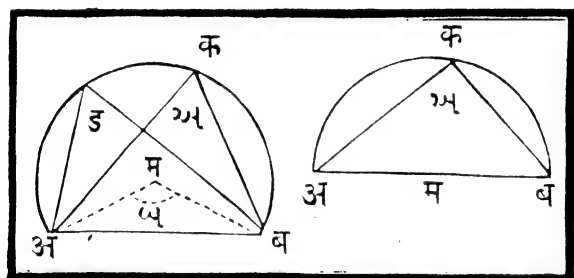
પ્રમેય ૪૦.

(૧) વર્તુળના એકજ ખંડમાંના ખુણાઓ સરખા હોય છે.

(૨) અર્ધવર્તુળના કરતાં મોટા વર્તુળખંડમાંના ખુણો સાંકડો ખુણો હોય છે.

(૩) અર્ધવર્તુળમાંના ખુણો કાટખુણો હોય છે.

(૪) અર્ધવર્તુળ કરતાં નાના વર્તુળખંડમાંના ખુણો પહોળો ખુણો હોય છે.



આકૃતિ ૧.

આકૃતિ ૨

(૧)

પક્ષ—અકબ એ એક વર્તુળખંડ છે, અને તેના કોંસ પર ક એક બિંદુ છે. અકબ ખુણાને અ અક્ષરથી ઓળખાવવામાં આવ્યો છે.

સાધ્ય—ક બિંદુ પરિધ પર ગમે ત્યાં હોય, તોપણ અ ખુણાનું મહત્ત્વ બદલાતું નથી.

સિદ્ધતા—કની સ્થિતિ પરિધ પર ગમે ત્યાં હોય, તોપણ અ ખુણો વર્તુળખંડ સિવાયના બાકીના કોંસ પરના મધ્ય-કોણના (એટલે બ ખુણાના) અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર૦ ૩૯)

એવીજ રીતે વર્તુળખંડના કોંસ પરના ક અથવા બીજા કોઈ પણ બિંદુ આગળનો ખુણો બ ખુણાના અર્ધ બરાબર છે. માટે કોઈ પણ વર્તુળખંડમાંના બધા ખુણાઓ સરખા છે.

(૨)

પક્ષ—અકબ વર્તુળખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટો છે.

(જુઓ આકૃતિ ૧).

સાધ્ય—અ ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે.

સિદ્ધતા— \therefore બ ખુણો બે કાટખુણા કરતાં નાનો છે;
(પ્ર૦ ૮ ઉ૦ ૨)

અને $\angle બ = ૨\angle અ$; (પ્ર૦ ૩૯)

$\therefore ૨\angle અ$ બે કાટખુણા કરતાં ઓછા;

$\therefore \angle અ$ એક કાટખુણા કરતાં ઓછો.

(૩)

પક્ષ—અકબ ખંડ અર્ધવર્તુળ છે. (આકૃતિ ૨ જુઓ).

સાધ્ય—અ ખુણો કાટખુણો છે.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle અમબ = ૨$ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧)

અને $\angle અમબ = ૨\angle અ$;

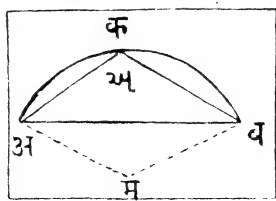
$\therefore \angle અ =$ એક કાટખુણો. (પ્ર૦ ૩૯).

(૪)

પક્ષ—અકબ ખંડ અર્ધવર્તુળ કરતાં નાનો છે.

(જુઓ આકૃતિ ૩).

સાધ્ય— $\angle અ =$ પહોળો ખુણો.



આકૃતિ ૩.

સિદ્ધતા— \therefore અમબ બહિર્વક ખુણો બે કાટખુણા કરતાં મોટો છે.

$\therefore ૨\angle અ$ બે કાટખુણા કરતાં વધારે.

∴ ∠અ એક કાટખુણા કરતાં મોટો.

ઉપસિદ્ધાંત—વ્યાસ એ વર્તુળની મોટામાં મોટી ન્યા છે.

૪૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. અબક ત્રિકોણના અ બિંદુમાંથી બક પાયા પર અડ લંબ દોરેલો છે, અને અઈ તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે; તો સાબીત કરો કે અબડ ને અઈક ત્રિકોણો, તેમજ અકડ ને અઈબ ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૨. અબક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગનાર લીટી પાયાને ડમાં મળે છે, અને તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને ઈમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબડ ને અઈક ત્રિકોણો, તેમજ અકડ ને અઈબ ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૩. એક વર્તુળના મધ્યબિંદુને કોઈ બહારના બિંદુ સાથે જોડનારી લીટીને વ્યાસ તરીકે લઈને એક વર્તુળ દોરો, અને એ વર્તુળોનાં છેદનબિંદુઓમાંના એકની સાથે બહારના બિંદુને જોડો. સાબીત કરો કે આ જોડનારી લીટી પહેલા વર્તુળની સ્પર્શલીટી છે.

૪. એક વર્તુળની ત્રિજ્યાને વ્યાસ તરીકે લઈ બીજું વર્તુળ દોરો, અને બતાવી આપો કે બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુમાંથી પહેલા વર્તુળમાં દોરેલી કોઈ પણ ન્યા બીજા (અંદરના) વર્તુળના પરિઘથી દુભાગાય છે.

૫. જો એક બીજાને છેદનારાં બે વર્તુળોના એક છેદન-બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોના વ્યાસો દોરવામાં આવે, તો આ વ્યાસોના બીજા છેડાઓ અને વર્તુળોનું બીજું છેદનબિંદુ એ સઘળાં એકજ સીધી લીટીમાં છે.

૬. એકજ પાયા પરના, તેની એકજ બાજુએ આવેલા,

અને જેનાં શિરોબિંદુઓ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય એવા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ આગળના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૭. એક વર્તુળમાં અબ, અક જ્યાંઓ છે. અબ, અક કૈંસોને અનુક્રમે ઢ ને ર્માં દુભાગેલા છે. ઢર્ફ સાંધો. ઢર્ફ લીટી અબ, અકને અનુક્રમે ફ ને ગ માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે અફ=અગ.

૮. અબક ત્રિકોણનો જ ખુણો કાટખુણો છે. અબને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ અકને ઢમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે આ વર્તુળને ઢ બિંદુમાં સ્પર્શ કરનારી લીટી બકને દુભાગે છે.

૯. એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બે સમાંતર લીટીઓ દોરી છે, અને બંને સ્પર્શબિંદુઓમાંથી સમાંતર જ્યાંઓ દોરી છે. સાબીત કરો કે આ જ્યાંઓના છેડાઓ સાંધવાથી થએલો ચતુષ્કોણ કાટખુણુ ચોખુણુ છે.

૧૦. બે વર્તુળો એક બીજાને અ આગળ બહારથી સ્પર્શ કરે છે, અને બક લીટી તેમને જ ને કમાં સ્પર્શ કરે છે; તો સાબીત કરો કે (૧) બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી એક સામાન્ય સ્પર્શલીટી બકને દુભાગે છે; (૨) બક લીટી અ સાથે કાટખુણો કરે છે; અને (૩) બકને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ અમાંથી પસાર થાય છે, અને બંને આપેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સ્પર્શ કરે છે.

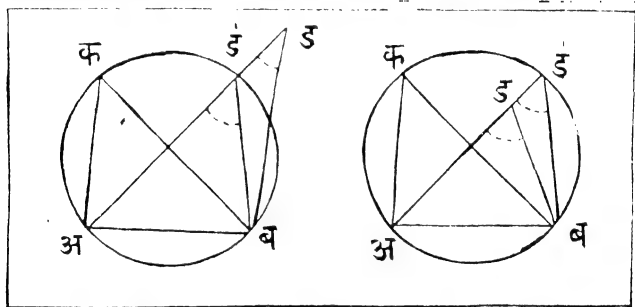
સૂચના—આપેલાં અ, બ, ક, બિંદુઓમાંથી પસાર થાય એવું ક્રૂત એકજ વર્તુળ દોરી શકાય. માટે ગમે તે ચારે બિંદુઓ અ, બ, ક, ઢમાંથી પસાર થાય એવું વર્તુળ હંમેશાં દોરી શકાય નહિ. જ્યારે આ ચાર બિંદુઓ અમુક શરત પૂર્ણ કરતાં હોય, ત્યારેજ એમ બની શકે, અને ત્યારેજ અ, બ,

કમાંથી પસાર થતું વર્તુળ જ્યાંથી પણ પસાર થાય. આ શરત કઈ તે હવે પછીના પ્રમેયમાં સમજાવવામાં આવી છે.

વ્યાખ્યા—જો ચાર અથવા આરથી વધારે બિંદુઓમાંથી વર્તુળ પસાર થઈ શકે એમ હોય, તો તે બિંદુઓને ચક્રીય બિંદુઓ કહે છે.

પ્રમેય ૪૧.

એક લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુએ આવેલાં બે બિંદુઓ સુધી દોરેલી બન્ને લીટીઓથી તે બિંદુઓ આગળ બનેલા ખુણા સરખા હોય, તો તે બે બિંદુઓ અને મૂળ લીટીના છેડાનાં બે બિંદુઓ—એ ચાર બિંદુઓ ચક્રીય હોય છે.



પક્ષ—અ, બ સાંધનારી અથવા લીટીના બે છેડામાંથી તેની એકજ બાજુ પર આવેલાં ક અને ઢ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓથી તે બિંદુઓ આગળ બનેલા ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—અ, બ, ક, ઢ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

રચના—અ, બ, કમાં થઈને પસાર થાય એવું વર્તુળ દોરો. એવું વર્તુળ એકજ દોરી શકાશે. (પ્ર૦ ૩૨)

હવે આ વર્તુળ જ્યાં થઈને પણ પસાર થાય છે એટલું બતાવીએ એટલે થયું.

સિદ્ધતા—જો અવક વર્તુળ ઢમાં થઈને પસાર થતું ન હોય, તો તે અડ (અથવા લંબાવેલી અડ)ને ઢમાં છેદશે. બડ સાંધો.

$$\angle \text{અડ'બ} = \angle \text{અકબ.} \quad (\text{પ્ર૦ ૪૦})$$

$$\text{પણ } \angle \text{અડબ} = \text{અકબ;} \quad (\text{પક્ષ})$$

$$\therefore \angle \text{અડ'બ} = \angle \text{અડબ.}$$

પરંતુ અડ'બ ખુણો અડબ ખુણાની બરોબર હોઈ શકે નહિ; કેમકે એક ઢબડ ત્રિકોણનો બહારનો અને બીજો માંડોનો સામેનો ખુણો છે.

\therefore અવક વર્તુળ ઢ સિવાય બીજા બિંદુમાં થઈને પસાર થઈ શકે નહિ; એટલે કે તે ઢ બિંદુમાં થઈને જ પસાર થવું જોઈએ. માટે અ,વ,ક,ડ એ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૪૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક વર્તુળના પરિઘ પર અ,વ,ક,ડ ચાર બિંદુઓ છે, અને અક,બડ એક બીજીને ક્ષમાં છેદે છે; તો સાખીત કરો કે અવક્ષ ને ઢકક્ષ ત્રિકોણો તેમજ વકક્ષ ને અડક્ષ ત્રિકોણો સમકોણ છે.

૨. અવક ત્રિકોણમાં બર્ફ,કફ અનુક્રમે અક,અવ પર લંબ દોરવામાં આવેલા છે; તો બતાવી આપો કે બ,ફ,ઈ,ક બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૩. એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તેમાં અવ ને ઢક સમાંતર બંધાવેલો છે; અને અક,બડ એક બીજીને ઈમાં છેદે છે. સાખીત કરો કે અ,મ,ઈ,ડ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૪. અવક ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી અડ,બર્ફ,કફ, એ ત્રણ લંબો સામી બાજુ પર દોરેલા છે. બતાવી આપો કે વકર્ફ, કઅફડ અને અવડર્ફ એ ચતુષ્કોણો ચક્રીય છે.

૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ પાયાને દુભાગે છે.

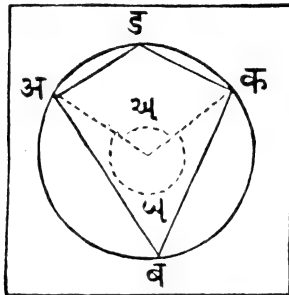
૬. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલાં વર્તુળો પાયાના મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૭. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલાં વર્તુળો પાયામાં (અથવા પાયાના લંબાવેલા ભાગમાં) એક બીજાને છેદે છે.

૮. સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને વ્યાસ તરીકે લઈ કાઢેલાં ચાર વર્તુળોમાં એક બિંદુ સામાન્ય હોય છે.

પ્રમેય ૪૨.

વર્તુળમાં કાઢેલા ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.



પક્ષ—વર્તુળમાં અબકડ ચતુષ્કોણ કાઢેલો છે.

સાધ્ય— \angle અ અને \angle ક, તેમજ \angle વ અને \angle ડ ન્યૂનતાપૂરક છે.

સિદ્ધતા— \because કોઈ કૌંસ પરનો મધ્યકોણ તેજ કૌંસ પરના પરિધકોણ કરતાં બમણો હોય છે; (પ્ર૦ ૩૯)

અને અડક, અબક કૌંસો પરના \angle અ અને \angle ખ એ મધ્યકોણો છે;

$\therefore \angle$ અ = ૨ \angle વ, અને \angle ખ = ૨ \angle ડ;

$$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{ખ} = ૨ (\angle \text{ચ} + \angle \text{ડ}).$$

પરંતુ $\angle \text{અ} + \angle \text{ખ} = ૪$ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧ ઉ૦).

$$\therefore ૨ (\angle \text{ચ} + \angle \text{ડ}) = ૪ \text{ કાટખુણા};$$

$$\therefore \angle \text{ચ} + \angle \text{ડ} = ૨ \text{ કાટખુણા}.$$

(એજ પ્રમાણે $\angle \text{અ} + \angle \text{ક} = ૨$ કાટખુણા એમ સિદ્ધ કરી શકાશે).

ઉપસિદ્ધાંત—વર્તુળની અંદર કાઢેલા ચતુષ્કોણનો બહારનો ખુણો તેની જોડના અંદરના ખુણાની સામેના ખુણા બરાબર હોય છે.

૪૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ બ્યાથી વર્તુળના જે બે ખંડ પડે, તેમાંના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. વર્તુળમાં કાઢેલા અબકકડ ચતુષ્કોણમાં $\angle \text{ચ} = \angle \text{ડ}$; તો સિદ્ધ કરો કે અક તે વર્તુળનો બ્યાસ છે.

૩. વર્તુળમાં દોરેલા સમલંબ ચોખુણની અસમાંતર બાજુઓ સરખી હોય છે.

૪. વર્તુળમાં દોરેલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચોખુણ છે.

૫. વર્તુળમાં દોરેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને મધ્યબિંદુમાં છેદે છે.

૬. વર્તુળમાં દોરેલા અબકકડ ચતુષ્કોણની અડ,બક બાજુઓ રૂમાં મળે ત્યાંસુધી લંબાવવામાં આવી છે; તો એ પ્રમાણે થએલા અબઈ અને ડકઈ ત્રિકોણો પરસ્પર સમ-કોણ છે.

૭. વર્તુળમાં દોરેલા અબકકડ ચતુષ્કોણની અડ,બક બાજુઓ લંબાવવાથી રૂમાં મળે છે. હવે જો રૂઅ=રૂચ હોય, તો સિદ્ધ કરો કે અબ લીટી કાઢને સમાંતર છે.

૮. અબકડ એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. ડઅ,કબ લંબા-વવાથી ર્માં મળે છે, અને અબ,કક લંબાવવાથી ફમાં મળે છે. હવે સિદ્ધ કરો કે જો અ,ર,ફ,ક બિંદુઓ ચક્રીય હોય, તો ર્ફ તેમાં થઈને તેમાં પસાર થતા વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને બડ એ અબકડ વર્તુળનો વ્યાસ છે.

૯. વર્તુળમાં દોરેલા અબકડ ચતુષ્કોણનો $\angle અ = ૬૦^\circ$, અને મ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે $\angle મબડ + \angle મકડ = \angle કબડ + \angle કકડ$.

૧૦. જો વર્તુળો એક બીજાને ર્ અને ફમાં છેદે છે; અર્થાત્ અને કકડ ગમે તે જો લીટીઓ પરિધાને અ,બ,ક, ડમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અક લીટી બડને સમાંતર છે.

૧૧. વર્તુળમાં દોરેલા ચોખુણનો બહારનો ખુણો અને તેની જોડેના અંદરના ખુણા સામેનો ખુણો, એ બંનેને દુભાગનારી લીટીઓ વર્તુળના પરિધ પર મળે છે.

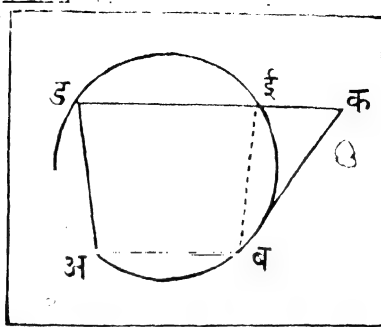
૧૨. અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો અબ પાયો એક વર્તુળની જ્યા છે. શિરોબિંદુ ક વર્તુળની બહાર છે. અક, બક સરખી બાજુઓ પરિધને અનુક્રમે ડ અને ર્ બિંદુમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે કડ = કર્.

૧૩. વર્તુળમાં દોરેલા ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનાર લીટી જે બિંદુમાં વર્તુળને મળે છે, તે બિંદુ ત્રિકોણના બીજાં જો શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૪- અબકડ ચતુષ્કોણની અબ,અડ બાજુઓ અને અક કર્ સરખાં છે; તો સાબીત કરો કે $\frac{૧}{૨} \angle બઅડ = \angle કબડ + \angle કકડ$.

પ્રમેય ૪૩.

કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓ ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.



પક્ષ—અવકાશ ચતુષ્કોણના અ ને ક ખુણાઓ ન્યૂનતા-પૂરક છે.

સાધ્ય—અવકાશ ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

રચના—અ, બ, ડમાં થઈને પસાર થતું એક વર્તુળ દોરો. જે આ વર્તુળ કમાં થઈને જતું ન હોય, તો તે ડક અથવા લંબાવેલી ડકને ફમાં છેદશે.

ફવ સાંધો.

સિદ્ધતા—∴ અવકાશ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે; (રચના)

∴ ∠બઈડ એ અનો ન્યૂનતાપૂરક છે. (પ્ર૦ ૪૨)

પણ ક ખુણો અ ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક છે; (પક્ષ)

∴ ∠બઈડ = ∠ક.

પણ આ અશક્ય છે. (પ્ર૦ ૮ ઉ. ૩)

∴ અવકાશ વર્તુળ ડક લીટીમાંના ક સિવાય બીજા કોઈ પણ બિંદુમાં થઈને જશે નહિ.

∴ અવકાશ ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે કોઈ ચતુષ્કોણની એક બાજુ લંબાવવામાં આવે, અને તેથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેનાની સામેના ખુણાની બરોબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

૪૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ કાટખુણ ચોખુણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.
૨. સમદ્વિબાણુ (ટ્રાપીઝિયમ) સમલંબ ચોખુણ ચક્રીય છે.
૩. મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. અબ, કડ સમાંતર જ્યાઓ છે. અક, બડને લંબાવવાથી તેઓ નમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અ,ન,ડ,મ ચક્રીય છે.

૪. અબક ત્રિકોણમાં બર્ડ, કફ લંબો એક બીજાને હમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે અર્ડહફ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

૫. જો બે વર્તુળોમાં સરખી જ્યાઓના સામેના પરિધ-કોણો સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે વર્તુળો સરખાં હોય છે.

૬. અવકડ એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. અબ, ડક લંબાવવાથી ફમાં મળે છે, અને અડ, વક લંબાવવાથી ર્ડમાં મળે છે; તો બકફ, કડર્ડ ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો ર્ડફ લીટી પર મળે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. કોઈ પણ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી થતો ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય છે.

૮. કોઈ પણ ત્રિકોણની બાજુઓમાં એકેક બિંદુ લઈ તેમને જોડી ત્રિકોણ બનાવવામાં આવે, તો તે લીટીઓથી થએલા ત્રિકોણ સિવાયના બીજા ત્રણ ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો એકજ બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

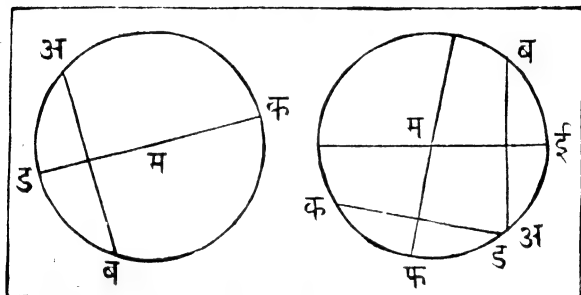
૯. અબકડ એક સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે; અ,બમાં થઈને દોરેલું વર્તુળ અડ,બકને (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) ર્ડ ને ફ બિંદુઓમાં મળે છે. સાબીત કરો કે ર્ડ,ફ,ક,ડ ચક્રીય છે.

પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો).

કૃત્ય ૧૬.

આપેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કાઢવું.



અબક એક આપેલું વર્તુળ છે.

(પહેલી રીત.)

રચના—અબ જ્યાં દોરો. એ જ્યાંને દુભાગનાર લંબ દોરો. એ લંબને પરિધને મળતાં સુધી બંને બાજુએ લંબાવો, અને તેને મ બિંદુમાં દુભાગો. મ એ માગેલું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા—∴ જ્યાંને દુભાગનાર લંબમાં વર્તુળનું મધ્ય-બિંદુ હોય છે; (પ્ર૦ ૩૧ ઉ૦).

∴ ડકમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

∴ પરિધ પરનાં સધળાં બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે;

∴ ડકનું મધ્યબિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

(બીજી રીત.)—

અબ જ્યાં દોરો. એક બીજી અસમાંતર જ્યાં કહ દોરો. અબને દુભાગનાર લંબ દોરો. કહને દુભાગનાર લંબ પણ

દોરો. ધારો કે આ લંબો ર્મ ને કમ છે, અને તેઓ એક બીજાને મમાં છેદે છે.

મ એ માગેલું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા—∴ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ જ્યાંને દુભાગનાર લંબમાં હોય છે; (પ્ર૦ ૩૧ ઉ૦).

∴ મધ્યબિંદુ ર્મમાં છે.

એજ કારણથી મધ્યબિંદુ કમમાં છે.

∴ મધ્યબિંદુ ર્મમાં છે અને કમમાં પણ છે;

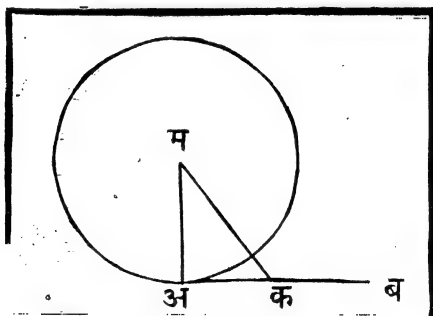
∴ એ બંનેનું સામાન્ય બિંદુ મધ્યબિંદુ છે.

એવું બિંદુ મ છે.

∴ મ એ મધ્યબિંદુ છે.

કૃત્ય ૧૭.

પરિધ પરના અથવા પરિધ બહાર આપેલા બિંદુ-માંથી આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટી દોરો. અ આપેલું બિંદુ છે.



ના (૧) અ બિંદુ પરિધ પર હોય, તો અમ ત્રિજ્યા દોરો. અ બિંદુમાંથી અમને ડાટખુણે અબ લીટી દોરો. અબ એ સ્પર્શલીટી છે.

સિદ્ધતા—મમાંથી અબને મળનારી મઅ સિવાય બીજી કોઈ મક લીટી દોરો.

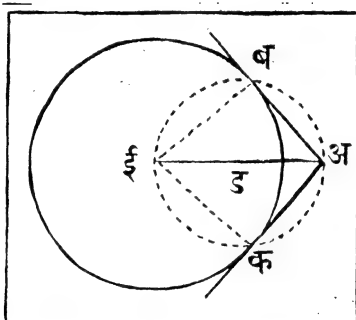
∴ મઅ લંબ છે, અને મક લંબ નહિ એવી તિર્યક્ લીટી છે;

∴ મક એ મઅ દરતાં મોટી છે; (પ્ર૦ ૨૧).

∴ ક બિંદુ પરિધની બહાર છે.

એજ પ્રમાણે સાબીત કરી શકાશે કે અ સિવાયનાં અવ-
માનાં સઘળાં બિંદુઓ પરિધની બહાર છે.

∴ અવ એ સ્પર્શલીટી છે.



(૨) અ બિંદુ પરિધની બહાર હોય, તો ધારો કે ઈ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. અઈ સાંધો. અઈને ડમાં દુભાગો. ડને મધ્યબિંદુ અને ડઈને ત્રિજ્યા લઈ આપેલા વર્તુળને બ તથા કમાં છેદે એવું એક વર્તુળ દોરો. અવ, અક સાંધો.

અવ, અક સ્પર્શલીટીઓ છે.

સિદ્ધતા—∴ અવઈ એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ તેમાંનો \angle અવઈ = કાટખુણો. (પ્ર૦ ૪૦).

∴ અવ લીટી ઈવ ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે;

∴ અવ સ્પર્શલીટી છે. (કૃત્ય ૧૭, ભાગ ૧).

એજ પ્રમાણે સાબીત થઈ શકશે કે અક સ્પર્શલીટી છે.

૧૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળના મધ્યબિંદુથી જે બહારના બિંદુનું અંતર વર્તુળના વ્યાસ જેટલું હોય, તે બિંદુમાંથી કાઢેલી સ્પર્શલીટી-એ વચ્ચેનો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

૨. એક આપેલા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી એવી દોરો, કે આપેલા બીજા બિંદુમાંથી તેના પર પડતો લંબ એક આપેલી અંતવાન સીધી લીટી બરોબર થાય.

૩. અ,બ આપેલાં બિંદુઓ છે. અને મધ્યબિંદુ લઈએક એવું વર્તુળ દોરો કે **બ** બિંદુમાંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી, અબ કરતાં જેની લંબાઈ ઓછી હોય, એવી એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

૪. અ ખુણો, અબ બાણુ, અને અમાંથી **બ**ક પર પડતો લંબ, એ આપેલાં છે; તો અબક ત્રિકોણ દોરો.

૫. આપેલા બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈ એક એવું વર્તુળ દોરો કે જે એક આપેલી સીધી લીટીને સ્પર્શ કરે.

૬. આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે એવું એક આપેલી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો.

૭. એક એવું વર્તુળ દોરો કે જે એક આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થાય અને આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે.

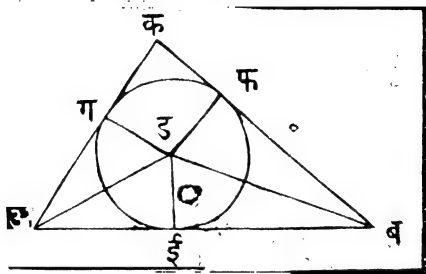
૮. આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરનારાં અને જેની ત્રિજ્યાઓ આપેલી લીટીઓની બરોબર અનુક્રમે હોય, એવાં અનેક વર્તુળો દોરો.

૯. અ ત્રિજ્યાવાળું એક દ્વ વર્તુળ છે. દ્વના મધ્યબિંદુથી **બ** અંતરે એક સીધી લીટી છે; તો આપેલા વર્તુળને અને આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરે એવું **જ** વર્તુળ કાઢો.

૧૦. એક આપેલા વર્તુળને આપેલા બિંદુમાં સ્પર્શ કરે અને આપેલા બીજા બિંદુમાંથી પસાર થાય એવું એક વર્તુળ દોરો.

કૃત્ય ૧૮.

આપેલા ત્રિકોણમાં વર્તુળ દોરવું.



અબક આપેલો ત્રિકોણ છે.

રચના—અ અને બ ખુણાઓને દુભાગનારી અડ, બડ લીટીઓ દોરો. ડ બિંદુમાંથી અબ પર ડઈ, બક પર ડફ, અને અક પર ડગ લંબ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અડગ અને અડઈ ત્રિકોણોમાં—

$$\angle ગઅડ = \angle ઈઅડ; \quad (\text{રચના}).$$

$$\angle અગડ = \angle અઈડ; \quad (\text{કાટખુણો}).$$

અડ બંનેમાં સામાન્ય છે;

$$\therefore ડગ = ડઈ. \quad (\text{પ્ર૦ ૧૧}).$$

એજ પ્રમાણે ડઈ=ડફ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

$$\therefore ડઈ=ડગ=ડફ.$$

માટે ડ મધ્યબિંદુ લઈને ડઈ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ ગ અને ફ બિંદુમાં થઈને પસાર થશે. ડઈ, ડગ, ડફ ત્રિજ્યાઓ આપેલા ત્રિકોણની બાજુઓ સાથે કાટખુણો કરે છે; તે પરથી સિદ્ધ થાય છે કે અબ, બક, કઅ દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ છે; અર્થાત્ આપેલા ત્રિકોણમાં વર્તુળ દોરાયું છે.

૧૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. ૧૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં કહ સાંધો, અને સાખીત કરો કે કહ લીટી ક ખુણાને દુભાગે છે.

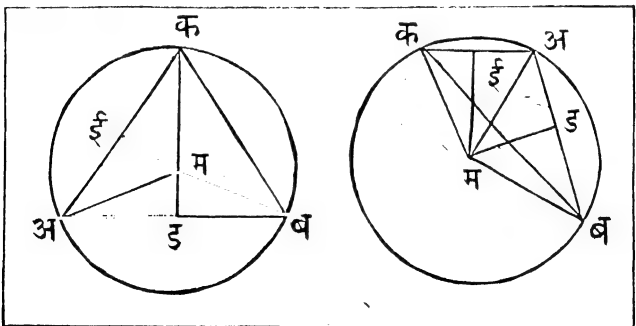
૨. જેની બાબુઓ અનુક્રમે ૩", ૨.૬", ૨.૮" અને ૨.૪", ૨", ૧.૮" હોય એવા બે ત્રિકોણોમાં વર્તુળો દોરો.

૩. બે સમાંતર સીધી લીટીઓ અને તેમને છેદનારી એક ત્રીજી લીટી એ ત્રણેને સ્પર્શ કરનાર વર્તુળ દોરો.

૪. ૧૮મા કૃત્યની આકૃતિની મદદથી સાખીત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણ, તે ત્રિકોણની પરિમિતિ જેવડી એક બાબુ અને તેની અંદર દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા જેવડી બીજી બાબુ વડે થએલા કાટખુણુ ચોખુણુના અર્ધ બરોબર છે.

કૃત્ય ૧૯.

આપેલા ત્રિકોણની આસપાસ વર્તુળ દોરવું; અર્થાત્ ત્રણ આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું વર્તુળ દોરવું.



અ,બ,ક ત્રણ આપેલાં બિંદુઓ છે, અથવા આપેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે. (જે બિંદુઓ આપ્યાં હોય, તે તેમને સાંધીને ત્રિકોણ બનાવો).

રચના—અબને હ બિંદુમાં અને અકને ર્દ બિંદુમાં દુભાગનાર લંબ દોરો. ધારો કે તે મમાં મળે છે. મઅ સાંધો. મને મધ્યબિંદુ લઈને મઅ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ આપેલા ત્રિકોણની આસપાસનું વર્તુળ થશે.

સિદ્ધતા—(મબ અને મક સાંધો).

∴ અડમ ને બડમ ત્રિકોણોમાં.—

અડ=બડ;

(રચના).

ડમ સામાન્ય છે;

અને \angle અડમ = \angle બડમ;

∴ અમ = બમ.

(પ્ર૦ ૧૦).

એજ પ્રમાણે અમ = કમ;

∴ અમ = બમ = કમ.

માટે મને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને મઅ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ અ,બ,કમાં થઈને પસાર થશે.

૧૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં, બકને ફ બિંદુમાં દુભાગો, અને મફ સાંધો. સાબીત કરો કે મફ લીટી કબ પર લંબ છે. બક પર મફ લંબ કાઢો, અને તે બકને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨. બે આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું અને આપેલી લીટીમાં જેનું મધ્યબિંદુ હોય એવું એક વર્તુળ દોરો.*

૩. બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતું અને આપેલા વર્તુળના પરિધ પર જેનું મધ્યબિંદુ હોય એવું એક વર્તુળ દોરો.*

૪. બે આપેલાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું અને આપેલી સીધી લીટી બરોબરની ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો.*

* કયા પ્રસંગોમાં ઉપલાં કૃત્યોના એક કરતાં વધારે જવાબ નીકળશે ? કયા પ્રસંગોમાં એકે જવાબ નહિ આવે ?

૫. જ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના મધ્યબિંદુથી ક અંતરે આવેલા એક બિંદુમાંથી એવી એક હ લંબાઈની લીટી દોરો કે તેનો છેડો આપેલા વર્તુળના પરિધ પર પડે.*

૬. સમબાજુ ત્રિકોણમાં અને તેની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુ એકજ હોય છે.

૭. પાયો, ઉંચાઈ, અને આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૮. આપેલાં ત્રણ બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું એક વર્તુળ દોરવું છે. આપેલાં બિંદુઓની સ્થિતિ કેવી હોય તો આ કૃત્ય અશક્ય થાય ?

૯. આપેલાં ચાર બિંદુઓમાં થઈને જેનો પરિધ પસાર થાય એવું વર્તુળ કાઢ્યા માટે ચારે બિંદુઓની સ્થિતિ કેવી હોવી જોઈએ ?

૧૦. સમબાજુ ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનો વ્યાસ તેજ ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળના વ્યાસથી બમણો હોય છે.

૧૧. કોઈ બહુકોણ આકૃતિની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળતાં હોય, તો તે બહુકોણ આકૃતિની આસપાસ વર્તુળ દોરી શકાય.



નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૨.

ખંડ ૩.

પ્રકરણ ૧.

(ક્ષેત્રફળ સંબંધી પ્રમેયો.)

ક્ષેત્રફળ વિષેના પ્રમેય સંબંધમાં નીચેની સમજાવતી ધ્યાન-
માં રાખવી:—

(૧) ગુજરાતી અક્ષરો જ્યાં લીટીને માટે વાપર્યા હોય,
ત્યાં તે લીટીની લંબાઈ (અર્થાત્ કોઈ પણ સંખ્યા)
દર્શાવે છે, એમ સમજવું.

(૨) અ. બ. એટલે અ×બ, અને અ તથા બ લીટીઓથી
થતા કાટખુણુ ચોખુણુનું ક્ષેત્રફળ અ×બ બરોબર હોય છે,
માટે અ. બ એટલે અ, બ લીટીઓથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુ
અથવા એ ચોખુણુનું ક્ષેત્રફળ. એજ પ્રમાણે ક્ષ.અબ; ક્ષ
(અ+બ); અબ... ઇં સમજવાં.

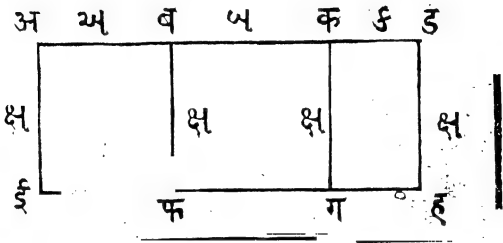
(૩) ક્ષ એકમ લંબાઈની લીટી પરના ચોરસમાં ચોરસ
એકમોની સંખ્યા ક્ષ×ક્ષ હોય છે, અને ક્ષ×ક્ષ=ક્ષ^૨; માટે
ક્ષ^૨ એટલે ક્ષ ઉપરનો ચોરસ અથવા એ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ.

ક્ષ (અ+બ+ક...) = ક્ષઅ+ક્ષબ+ક્ષક..... એ અક્ષર-
ગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય.—

પ્રમેય અ.

જો બે સીધી લીટીઓમાંથી એકના ગમે તેટલા

ભાગ કરવામાં આવે, તો તે બે સીધી લીટીઓથી થતો કાટખુણ ચોખુણ અવિભાજિત લીટી અને વિભાજિત લીટીના જુદા જુદા ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણોના સરવાળા બરોબર હોય છે.



રચના—એક ખીજ સાથે કાટખુણો કરનારી બે અમર્યાદ લીટીઓ દોરો. એક લીટી પર અ,બ,ક... લંબાઈના અવ,વક,કકડ.... ભાગોનાં એક પછી એક નિશાન કરો; અને ખીજ લીટી પર ક જોડા અઈ ભાગનું નિશાન કરો. વ,ક,કમાંથી અઈને સમાંતર, અને ઈમાંથી અકને સમાંતર લીટીઓ દોરો, અને ચતુષ્કોણો પુરા કરો.

સિદ્ધતા—∵ અઈ, વક, કક અને કક સમાંતર છે; (રચના)

અને અક લીટી ઈકને સમાંતર છે; (રચના)

∴ આકૃતિમાંના સઘળા ચતુષ્કોણો સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણો છે.

∴ ∠વઅઈ = ∠કવક = ∠કક, (પ્ર૦ ૬)

અને ∠વઅઈ = એક કાટખુણો. (રચના)

∴ કવક અને કક એ દરેક એક કાટખુણો બરોબર છે.

∴ અક, અવ, વક, કક એ સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણોનો એક ખુણો કાટખુણો છે.

∴ તે સઘળા કાટખુણ ચોખુણો છે. (પ્ર૦ ૨૨. ઉ૦૨)

હવે આકૃતિ પરથી.—

અહ=અફ + બગ + કહ.

પણ અહ એટલે અઈ. અહ=ક્ષ=(અ+ખ+ક);

અફ એટલે અઈ. અબ=ક્ષઅ;

બગ એટલે બફ. બક=ક્ષખ;

કહ એટલે કગ. કહ=ક્ષક;

∴ ક્ષ (અ+ખ+ક)=ક્ષઅ + ક્ષખ + ક્ષક.

સૂચના—ઉપલી સિદ્ધતાથી સાબીત કીધું કે ક્ષ(અ+ખ+ક)=ક્ષઅ + ક્ષખ + ક્ષક. એ પરથી ખુદલુંજ છે કે એને લગતી અક્ષરગણિતની સમાનતા પણ સિદ્ધ થઈ. એજ દીકા હવે પછીના ત્રણ પ્રમેયોને પણ લાગુ પડે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—એક સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી અને દરેક ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણો એકઠા મળીને આખી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

એટલે કે $(અ+ખ)અ+(અ+ખ)ખ=(અ+ખ)^2$.

સિદ્ધતા—∴ ક્ષ (અ+ખ)=ક્ષઅ+ક્ષખ, (૫૦ અ)

∴ ક્ષઅ+ક્ષખ=ક્ષ(અ+ખ).

ક્ષ=(અ+ખ) લઈ એ તો

$(અ+ખ)અ+(અ+ખ)ખ=(અ+ખ)(અ+ખ),$
 $= (અ+ખ)^2.$

ઉપસિદ્ધાંત ૨—એક સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી અને બેમાંના એક ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણ, તે ભાગ પરના ચોરસ અને બે ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણ એ બંનેના સરવાળા બરોબર હોય છે.

$(અ+ખ)અ = અ^2 + અખ.$

અ પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક સીધી લીટી પર અનુક્રમે અ,વ,ક,ઙ એવાં ચાર બિંદુઓ લીધાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે

$$અવ \cdot કઙ + વક \cdot અઙ = અક \cdot વઙ.$$

૨. $(અ-વ)ક = અક - વક.$

૩. અ,વ બે આપેલી લીટીઓ છે; તો બતાવી આપો કે $૨ અ \times વ = ૩ અ \times ક = ૩ વ \times ઙ.$

૪. અવના ક અને ઙ બિંદુમાં ત્રણ સરખા ભાગ ક્યાં છે, અને અવને ર્ સુધી લંબાવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે $કર્-ર્ઙ = અર્-ર્વ + ૨અક.$

૫. અવકઙ એક સીધી લીટી છે. અવ=વક અને અક=કઙ હોય, તો $અઙ \cdot ઙક = ૮અવ.$

૬. ફર્અવકઙ લીટીમાં અ એ ફકનું તેમજ ર્વનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે

$$વક \cdot કર્ + કઙ \cdot ઙફ = વઙ \cdot ઙર્.$$

$(અ+વ)^૨ = અ^૨ + વ^૨ + ૨અવ$ એ અક્ષરગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય—

પ્રમેય ૬.

કોઈ પણ સીધી લીટીના ગમે તેવા બે ભાગ કરવામાં આવે, તો આખી લીટી પરના ચોરસ, બંને ભાગ ઉપરના ચોરસના તથા બેઉ ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

અથવા

બે લીટી મળીને થએલી એક સીધી લીટી પરના ચોરસ બંને લીટી પરના ચોરસના તથા બેઉ ભાગથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરોબર હોય છે.

અ	અ	બ	બ	ક
બ	અ	બ	બ	બ
લ		ફ		ફ
અ		અ		અ
ગ	અ			
		હ	બ	ડ

રચના—એક ખીજ પર લંબ હોય એવી બે લીટીઓ દોરો. એમાંની એક લીટી પર અ, બ લંબાઈ બરોબરનાં અનુક્રમે અબ, બક ભાગોનાં નિશાન કરો. ખીજ લીટી પર બ, અ લંબાઈ બરોબરનાં અલ, લગ ભાગોનાં નિશાન કરો. વ,કમાંથી અગને સમાંતર અને લ,ગમાંથી અકને સમાંતર લીટીઓ દોરી ચતુષ્કોણો પુરા કરો.

સિદ્ધતા—(ગયા પ્રમેય અમાં બતાવ્યા પ્રમાણે આ આકૃતિમાંના બધા ચતુષ્કોણો કાટખુણુ ચોખુણો છે). હવે,

∴ અ=અબ=લફ, અને અ=લગ, (પ્ર૦ ૨૨ અને રચના)

∴ લફ=લગ.

∴ ગફ=અ ઉપરનો ચોરસ. (પ્ર૦ ૨૨ ઉ. ૩)

∴ બ=બક, અને બ=અલ=બફ;

∴ બક=બફ.

∴ કફ એ બ ઉપરનો ચોરસ છે.

હવે, આકૃતિ પરથી—

અહ=ગફ+ફક+ફઅ+ફહ.

$$\text{પરંતુ અડ} = (\text{અ} + \text{ખ})^2;$$

$$\text{ગફ} = \text{અ}^2;$$

$$\text{ફક} = \text{ખ}^2;$$

$$\text{ફઅ} = \text{અખ};$$

$$\text{ફહ} = \text{અખ};$$

$$\therefore (\text{અ} + \text{ખ})^2 = \text{અ}^2 + \text{ખ}^2 + 2 \text{અખ}.$$

બ પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ લીટી પરનો ચોરસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચોરસ કરતાં ચારગણો હોય છે.

૨. અવના ક બિંદુમાં એવા બે ભાગ પડે છે કે અવ^૨ = અક^૨ + ૨ વક^૨; તો સિદ્ધ કરો કે વક = ૨ અક.

૩. એક લીટીના ૨ : ૧ના પ્રમાણમાં બે ભાગ પાડવામાં આવે, તો આખી લીટી પરનો ચોરસ, નાના ભાગ પરના ચોરસના તથા બીજા ભાગ પરના ચોરસની બમણાઈના સરવાળા બરાબર હોય છે.

૪. એક લીટીના ગમે તેટલા ભાગ પાડવામાં આવે, તો આખી લીટી પરનો ચોરસ, જુદા જુદા ભાગો પરના ચોરસના તથા એ ભાગોમાંની દરેક જોડથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈના સરવાળા બરાબર હોય છે.

૫. અવને કમાં દુભાગી હ સુધી લંબાવી છે. સિદ્ધ કરો કે અહ^૨ - હવ^૨ = ૪ અક.કહ.

૬. અહના વ બિંદુ આગળ બે સરખા ભાગ પડે છે, અને અ બિંદુ આગળ એવા બે વિષમ ભાગ પડે છે કે અક.કહ = ૩વક^૨; તો સિદ્ધ કરો કે વહ = ૨વક.

૭. અવના ક બિંદુ આગળ એવા બે ભાગ પડે છે કે અવ.વક = અક^૨ કઅમાંથી કવ જેવડો કહ ભાગ કાપી કાઢેલો છે; તો સિદ્ધ કરો કે કઅ.અહ = કહ^૨.

૮. અવના હ બિંદુ આગળ એવા બે ભાગ પડે છે કે
 $અહ^2 = અવ \cdot હવ$ છે; જાને ક સુધી એવી રીતે લંબાવી
 છે કે $વક = અવહ$; તો સિદ્ધ કરો કે $વહ^2 = વઅ \cdot અક$.

૯. બે એક સીધી લીટીમાં અ,વ,ક,હ એવાં ચાર
 બિંદુઓ અનુક્રમે લેવામાં આવે, તો

$$(૧) અક^2 + વહ^2 = અવ^2 + કહ^2 + ૨અહ \cdot વક.$$

$$(૨) અહ^2 + વક^2 = અક^2 + વહ^2 + ૨અવ \cdot કહ.$$

૧૦. અવને ક આગળ દુભાગી હ સુધી એવી રીતે
 લંબાવી છે કે $કહ^2 = અવ^2 + વક^2$; તો સિદ્ધ કરો કે
 $અહ \cdot હવ = અવ^2$.

૧૧. એક સીધી લીટીમાં અ,વ,ક,હ,પ એ પાંચ બિંદુઓ
 અનુક્રમે એવી રીતે લીધાં છે કે $અવ = વક = કહ$ છે; તો
 સિદ્ધ કરો કે અપ, હવ ઉપરના ચોરસોનો તફાવત વપ,
 કપ ઉપરના ચોરસોના તફાવત કરતાં ત્રણગણો છે.

૧૨. અવકહઈ એક લીટી છે, અને ક એ વહનું
 મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે $અક^2 + વઈ \cdot હઈ = ઈક^2 +$
 $અવ \cdot અહ$.

$(અ-બ)^2 = અ^2 + બ^2 - ૨અબ$, એ અક્ષરગણિતની
 સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય.

પ્રમેય ક.

બે લીટીઓના તફાવત ઉપરનો ચોરસ, તે બે
 લીટીઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો અને તે બે
 લીટીઓથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ, એ
 બે વચ્ચેના તફાવત બરોબર હોય છે.

અ	અ-બ	ક	બ	વ
બ	અ-બ	બ		બ
હ		ગ	બ	ફ
ઝ		ઝ	ઝ	ઝ
ઞ	અ-બ	ય	બ	ક

અ ને બ આપેલી લીટીઓ છે, અને ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

અ લંબાઈની એક અબ લીટી લો. તેમાંથી બઃ જોડો એક ભાગ કાપી કાઢો. અબ ઉપર અબડઈ ચોરસ દોરો અને ઉપલી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.*

સિદ્ધતા—આકૃતિ પરથી—

$$હય = અડ + કફ - અફ - કડ.$$

$$પરંતુ હય = (અ - બ)^2;$$

$$અડ = અ^2;$$

$$કફ = બ^2;$$

$$અફ = અબ;$$

*આ અને પછીના પ્રમેયમાં રચના અને સિદ્ધતાનો કેટલોક ભાગ અ અને બ પ્રમેયના જોવાજ હોવાથી તેની પુનરુક્તિ કરી નથી; પણ વિદ્યાર્થીઓએ તે એ ભાગ સવિસ્તર બતાવવાની જરૂર છે.

કહ = અબ;

$$\therefore (અ-બ)^2 = અ^2 + બ^2 - અબ - અબ = અ^2 + બ^2 - ૨ અબ.$$

આ પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ આપી શકાય:—
જો કોઈ લીટીના બે ભાગ કરવામાં આવે, તો એ બે ભાગો વચ્ચેના તફાવત ઉપરનો ચોરસ, તે બે ભાગો ઉપરના ચોરસના સરવાળામાંથી તે બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણની અમણાઈ બાદ કરતાં જે રહે તેની બેગુણર હોય છે.

ક પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. $(અ+બ)^2 - (અ-બ)^2 = ૪અબ.$

૨. બે લીટીઓથી થએલા કાટખુણ ચોખુણનો તથા તે બે લીટીઓના તફાવતના અર્ધ ઉપરના ચોરસનો સરવાળો તે બે લીટીના સરવાળાના અર્ધ ઉપરના ચોરસ બેગુણર હોય છે.

૩. એક આપેલી લીટીના કયા બિંદુમાં બે ભાગ કરવામાં આવે તો તે બે ભાગોથી થતા કાટખુણ ચોખુણ મોટામાં મોટો થાય ?



$(અ^2 - બ^2) = (અ-બ) (અ+બ)$ એ અક્ષરગણિતની સમાનતાને લગતો ભૂમિતિનો પ્રમેય—

પ્રમેય ઢ.

બે લીટીઓ પરના ચોરસોનો તફાવત બે લીટીઓના સરવાળા તથા તફાવતથી થતા કાટખુણ ચોખુણ બેગુણર હોય છે.

પહેલી રીત.

	અ		
ય	બ	ર	લ
		અ-બ	
હ	બ	સ અ-બ	અ
	ક અ-ક		
શ	બ	અ-બ	વ

ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

અ લંબાઈની એક ચલ લીટી દોરો. તેમાંથી બ જેવડો ચર ભાગ કાપી કાઢો. ચલ પર ચલવશ ચોરસ દોરો. ચશમાંથી બ બરોબરનો ચહ ભાગ કાપી કાઢો. ર અને હમાંથી અનુક્રમે ચશ, ચલને સમાંતર લીટીઓ દોરો, અને આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.

સિદ્ધતા—આકૃતિ ઉપરથી—

$$ચવ-ચસ = શસ+રવ.$$

$$પરંતુ ચવ=અ^2;$$

$$ચસ=બ^2;$$

$$શસ=(અ-બ) બ;$$

$$રવ=(અ-બ)અ;$$

$$શસ+રવ=(અ-બ)અ+(અ-બ)બ=$$

$$(અ-બ) (અ+બ);$$

(પ્ર૦ અ)

$$\therefore (અ^2-બ^2)=(અ+બ) (અ-બ).$$

બીજી રીત.

અ	અ	વ	બ	અ	ક
ક		ક	બ	ક	અ
ક		ગ		ફ	
હ		સ		બ	ફ
			ય		ફ

ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

અથી બમણી એક અક લીટી દોરો. તેના મધ્યબિંદુ
બમાંથી બ જેવડી લંબાઈનો એક બડ ભાગ પાડો. બક
પર બકઈસ ચોરસ દોરો. કઈને સમાંતર હચ દોરો. હક
=હફ કરો. કઈને સમાંતર અહ દોરો. ફ બિંદુમાંથી અકને
સમાંતર ફહ દોરો.

સિદ્ધતા—

(આકૃતિ પરથી) બઈ-ગચ=બફ+હઈ.

પરંતુ હઈ=અ(અ-બ)=અગ;

∴ બઈ-ગચ=બફ+અગ;

= અફ.

પરંતુ બઈ=અ^૨

ગચ=બ^૨;

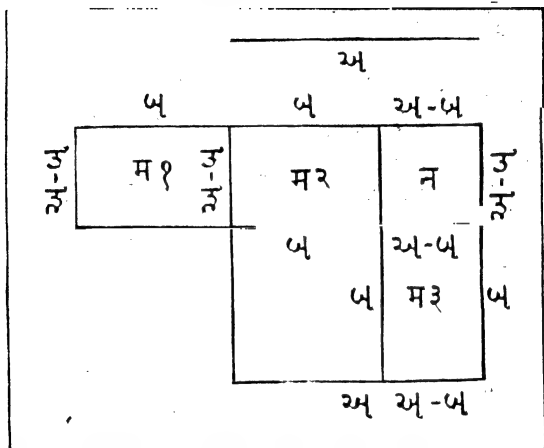
અફ=(અ+બ)(અ-બ).

∴ (અ^૨-બ^૨)=(અ+બ)(અ-બ).

ઉપસિદ્ધાંત ૧. જો કોઈ લીટીના બે સરખા ને બે
વિષમ ભાગ પાડવામાં આવે, તો વિષમ ભાગોથી

થતો કાટખુણ ચોખુણ અને છેદનબિંદુઓ વચ્ચેની
લીટી પરનો ચોરસ એ બે મળીને અડધી લીટી
પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.

ત્રીજી રીત.



ધારો કે અ લીટી બ કરતાં મોટી છે.

બથી બમણી લંબાઈની એક લીટી દોરો. તેના મધ્ય-
બિંદુથી અ જોટલી લંબાઈનો એક ભાગ પડે એટલે સુધી
તેને લંબાવો. આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે આકૃતિ પુરી કરો.

સિદ્ધતા—

આકૃતિમાં $\therefore m_1 = m_2 = m_3$.

$\therefore m_1 + m_2 = m_2 + m_3$.

સમીકરણની બંને બાજુમાં ન આકૃતિ ઉમેરો.

$\therefore m_1 + m_2 + n = m_2 + n + m_3$;

પરંતુ $m_1 + m_2 + n = (અ+બ)(અ-બ)$;

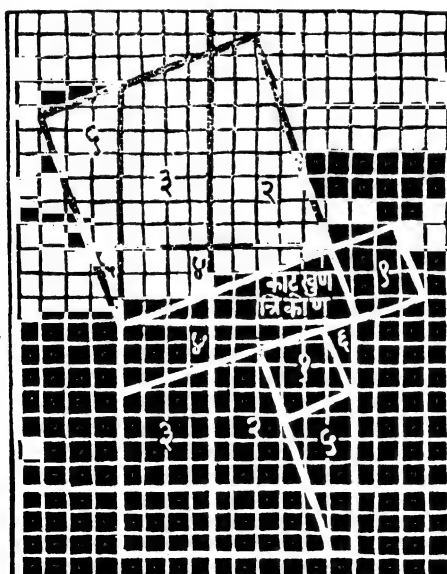
અને $m_2 + n + m_3 = અ^2 - બ^2$.

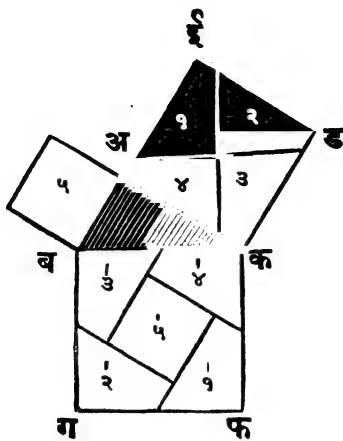
$\therefore (અ^2 - બ^2) = (અ+બ)(અ-બ)$.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—જો એક સીધી લીટીને દુભાગીને ગમે તે બિંદુ સુધી લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રમાણે વધારેલી આખી લીટી અને વધારેલા ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ તથા દુભાગેલી લીટીના અર્ધ ઉપરનો ચોરસ, એ બે મળીને અડધી લીટી અને વધારેલો ભાગ એ બેની બનેલી લીટી ઉપરના ચોરસ બરોબર છે.

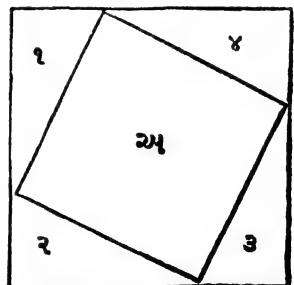
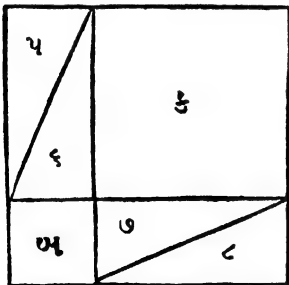
૪૪મા પ્રમેયની પ્રાયોગિક સિદ્ધતા.

ચોરસ દોરેલા કાગળ પર ગમે તેવો એક કાટખુણ ત્રિકોણ દોરો. તેની બાજુઓ પર ચોરસો કાઢો. કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોમાંના ચોરસ ખાનાંઓનો સરવાળો કરો, અને કર્ણ પરનાં ચોરસમાંનાં ચોરસ ખાનાંઓ સાથે તે સરવાળો સરખાવો.



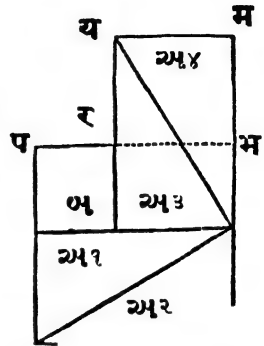
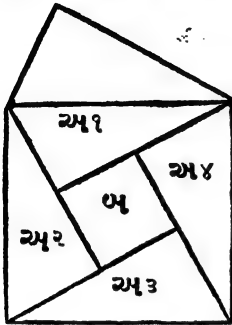


ગમે તેવો એક કાટખુણુ ત્રિકોણ દોરો. કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પર ચોરસો કાઢો. ઉપર દોરેલી આકૃતિઓમાં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ચોરસોના ભાગો કાપી કાઢો; અને તે ભાગોને કર્ણ પરના ચોરસમાં તેવાજ આંકડાઓથી બતાવેલા ભાગો પર ગોઠવો.



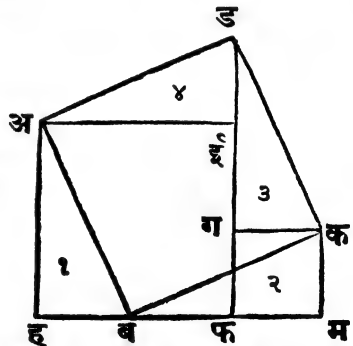
ઉપર દોરેલી બંને આકૃતિઓ સરખી છે, અને તેમાં ૧, ૨, ૩, ૪, ૫, ૬, ૭, ૮ એ આંકડાઓથી બતાવેલા ભાગો એકરૂપ છે. ડાબી તરફની આકૃતિમાંથી ૫, ૬, ૭, ૮ એ ભાગો કાઢી લઈએ, તો ૭ ને ક ચોરસો રહે છે; અને જમણી બાજુ તરફની આકૃતિમાંથી તેવાજ ભાગો એટલે કે ૧, ૨, ૩, ૪ એ

ભાગો કાઢી લઈએ, તો આ ચોરસ બાકી રહે છે. આ ચોરસો અનુક્રમે કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના અને કર્ણ પરના ચોરસો છે.



ઉપર આપેલી આકૃતિમાંના કર્ણ પરના ચોરસના ભાગો જમણી તરફની બીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવીએ, તો કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસો બની રહે છે.

અહલ કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસો હૃદ અને કફમાંથી ૧, ૨ એ ભાગો (\triangle અહલ અને \triangle લમક) કાઢી લઈએ, અને તેમને ૩ તથા ૪ એ આંકડાઓ-



વાળે ઠેકાણે ગોઠવીએ તો અલ કર્ણ પરનો ચોરસ બની રહે છે.

ગમે તેવો એક કાટખુણ ત્રિકોણ દોરો. તેની ત્રણે બાજુઓ માપો. કર્ણનો વર્ગ કરો. બીજી બે બાજુઓનો વર્ગ કરી તેનો સરવાળો કરો. એ સરવાળાને કર્ણના વર્ગ સાથે સરખાવો. (પુ૦).

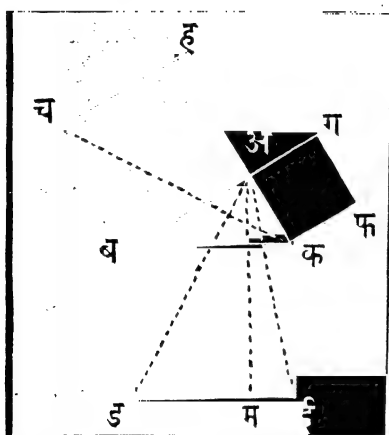
કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ પરનો ચોરસ, અને બીજી બે

બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા—એ બે વચ્ચેના સંબંધ વિષે ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી તમારા સમજવામાં શું આવે છે ?

“ કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપરનો ચોરસ કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે. ”

પ્રમેય ૪૪.

કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપરનો ચોરસ કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.



પદ્ધતિ—અબક ત્રિકોણનો અ ખુણો કાટખુણો છે. ચકઈડ, અકફગ, અબચહ એ ત્રિકોણની બાજુઓ પર દોરેલા ચોરસો છે.

સાધ્ય—ચક ઉપરનો ચોરસ=અબ ઉપરનો ચોરસ + કઅ ઉપરનો ચોરસ.

રચના—ચકને સમાંતર અમ દોરો, અને તેને ડઈ લીટીને મ ખિંદુમાં મળવા દો. ચક અને અક સંધિ.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle$ ચઅક, \angle ચઅહ એ દરેક કાટખુણો છે;

\therefore કઅ, અહ એક સીધી લીટીમાં છે. (૫૦૨).

તેજ પ્રમાણે ઘઅ,અગ એક સીધી લીટીમાં છે.

$$\angle \text{ચવઅ} = \angle \text{કવડ}; \quad (\text{દરેક કાટખુણો})$$

એ દરેકમાં $\angle \text{અવક}$ ઉમેરો.

$$\therefore \angle \text{ચવક} = \angle \text{અવડ}.$$

\therefore ચવક અને અવડ ત્રિકોણોમાં—

$$\text{ચવ} = \text{અવ}; \quad (\text{ચોરસની ખાણુઓ})$$

$$\text{કવ} = \text{વડ}; \quad (,,)$$

$$\angle \text{ચવક} = \angle \text{અવડ};$$

\therefore એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૦)

હવે, અચ ચોરસ અને ચવક ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ ઉંચાઈના છે;

$$\therefore \text{અચ ચોરસ} = ૨ \text{ચવક ત્રિકોણ}. \quad (\text{પ્ર૦ ૨૮}).$$

$$\text{તેજ પ્રમાણે } \square \text{વમ} = ૨ \triangle \text{અવડ}. \quad (,,)$$

$$\text{અને } \therefore \triangle \text{ચવક} = \triangle \text{અવડ};$$

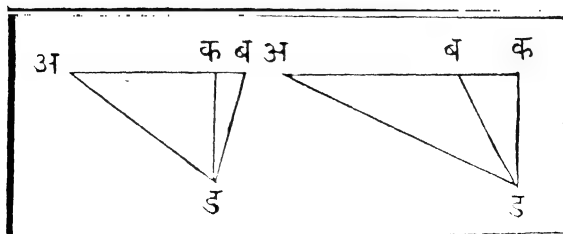
$$\therefore \text{અચ ચોરસ} = \square \text{વમ}.$$

એજ પ્રમાણે કગ ચોરસ = \square કમ સિદ્ધ થશે.

$$\therefore \text{બર્ફ ચોરસ} = \text{અચ ચોરસ} + \text{કગ ચોરસ}.$$

ઉપસિદ્ધાંત—અવમાં અથવા અવના લંબાવેલા ભાગમાં ક એક બિંદુ હોય, અને ક બિંદુમાંથી અવ પર દોરેલા લંબમાં એક ડ બિંદુ હોય; તો

$$\text{અડ}^2 - \text{વડ}^2 = \text{અક}^2 - \text{વક}^2.$$



૪૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. કોઈ પણ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેના કર્ણ ઉપરના ચોરસના ક્ષેત્રફળનું અર્ધ હોય છે.

૨. કાટખુણુ ત્રિકોણમાં એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણા કરતાં બમણો હોય, તો પહેલા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ નાના ખુણાની સામેની બાજુ પરના ચોરસ કરતાં ત્રણગણો હોય છે.

૩. કોઈ પણ કાટખુણુ ચોખુણુની બે પાસપાસેની બાજુઓ પરના ચોરસોના કર્ણોથી થતો કાટખુણુ ચોખુણુ પહેલા કાટખુણુ ચોખુણુથી બમણો હોય છે.

૪. કાટખુણો કરનારી કાટખુણુ ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના કર્ણોથી થતો કાટખુણુ ચોખુણુ તે ત્રિકોણથી ચારગણો હોય છે.

૫. અબક ત્રિકોણનાં અ, બ, ક શિરોબિંદુઓમાંથી સામા બાજુઓ પર અનુક્રમે અડ, બર્ડ, કફ લંબો પડે છે; તો સિદ્ધ કરો કે

$$અર્ડ^2 + બફ^2 + કડ^2 = અફ^2 + બડ^2 + કર્ડ^2.$$

૬. અબક ત્રિકોણનો અ ખુણો કાટખુણો છે, અને તેની બાજુઓ પર બકડર્ડ, કફગઅ, અબચહ ચોરસો દોરેલા છે; તો સાબીત કરો કે

(૧) ફ, અ, ચ, એક સીધી લીટીમાં છે.

(૨) હઅગ, ચબર્ડ, ફકડ, અબક એ ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

(૩) બહ, કગને સમાંતર છે.

૭. પચર ત્રિકોણનો ચ ખુણો કાટખુણો છે, અને ચરમાં સ ગમે તે એક બિંદુ લીધેલું છે; તો સિદ્ધ કરો કે

$$પસ^2 + ચર^2 = પર^2 + બસ^2.$$

૮. અબક ત્રિકોણનો અ ખુણો કાટખુણો છે. અક, અબ

બાજુઓમાં અનુક્રમે ચ, ક્ષ બિંદુઓ લીધેલાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે $બચ^2 + કક્ષ^2 = ક્ષચ^2 + ચક^2$.

૯. અબકડ કાટખુણુ ચોખુણુમાં ઓ એક બિંદુ ગમે તે લીધું છે, તો સિદ્ધ કરો કે $ઓઅ^2 + ઓક^2 = ઓબ^2 + ઓડ^2$.

૧૦. કોઈ પણ કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણો કરનારી બાજુઓમાંની એક બીજી કરતાં બમણી હોય, તો કર્ણ ઉપરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓમાંની નાની ઉપરના ચોરસ કરતાં પાંચગણો હોય છે.

૧૧. કાટખુણુ ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી કર્ણ પર પડતા લંબથી કર્ણના જે બે ભાગ પડે, તે ભાગો પરના ચોરસોનો તફાવત બીજી બાજુ પરના ચોરસ બરાબર હોય છે.

૧૨. શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર પડતા લંબ વડે પાયાના જે બે ભાગ પડે છે, તે ભાગો પરના ચોરસોનો તફાવત બે બાજુઓ પરના ચોરસોના તફાવત બરાબર હોય છે.

૧૩. અબક ત્રિકોણમાં $\angle અ = \angle ક = \frac{1}{2}$ કાટખુણો છે. અબ ને ચ તરફ લંબાગી છે અને તેના પર ક બિંદુમાંથી કડ લંબ દોરેલો છે; તો બતાવી આપો કે $અચ^2 = ૨ચક^2$.

૧૪. અબક ત્રિકોણનો ચ ખુણો કાટખુણો છે. અબ=૩", અને ચક=૪" છે. અક પર કઈ લંબ દોર્યો છે અને તે ચકથી ત્રણગણો છે; તો અઈની લંબાઈ શોધી કાઢો.

૧૫. બે આપેલા ચોરસોના સરવાળા બરાબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૬. આપેલા બે ચોરસોના તફાવત બરાબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૭. આપેલા ત્રણ ચોરસોના સરવાળા બરાબરનો એક ચોરસ દોરો.

૧૮. આપેલા ચોરસથી ચારગણો એક ચોરસ દોરો.

૧૯. એક ઇંચની લીટીની મદદથી $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ઇંચ લંબાઈની લીટીઓ કાઢો.

૨૦. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે તે બે ભાગો પરના ચોરસોનો સરવાળો આપેલા ચોરસ બરાબર હોય. (આવું હંમેશાં બની શકે ?)

૨૧. અબકડ ચોરસની અડ બાજુ લંબાવેલી છે. અક કર્ણને લંબાવી તે લંબાવેલા ભાગમાં એક એવું બિંદુ લો, કે તે બિંદુમાંથી અબને સમાંતર દોરેલી લીટીથી (અડ સાથે) થતો કાટખુણુ ત્રિકોણ આપેલા ચોરસ બરાબર થાય.

૨૨. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે એક ભાગ પરનો ચોરસ બીજા ભાગ પરના ચોરસ કરતાં બમણો થાય.

૨૩. કાટખુણુ ત્રિકોણમાં એક સાંકડા ખુણાવાળા શિરોબિંદુ-માંથી સામેની બાજુને દુભાગનાર એક મધ્યગા દોરી છે; તો બતાવી આપો કે આ બાજુના અર્ધ પરના ચોરસની તમણાઈ તથા મધ્યગા પરનો ચોરસ એ બે મળીને કર્ણ પરના ચોરસની બરાબર છે.

૨૪. અબક સમબાજુ ત્રિકોણની અબ બાજુ ડ સુધી લંબાવી છે, અને વડને અબથી બમણી રાખી છે; તો બતાવી આપો કે $k^2 = 7ab^2$.

૨૫. ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરના ચોરસોનો તફાવત, તે બે બાજુઓ વચ્ચેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ તથા પાયાનું મધ્યબિંદુ એ બે વચ્ચેનો ભાગ અને પાયો, એ બેથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુ કરતાં બમણો હોય છે.

૨૬. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને, પાયાને લંબાવી તેમાં લીધેલા એક બિંદુ સાથે સાંધવામાં આવે, તો સાંધનારી લીટી તથા ત્રિકોણની એક બાજુ પરના ચોરસોનો તફાવત બહાર લીધેલા બિંદુથી પડતા પાયાના બે ભાગોથી

થતા કાટખુણુ ચોખુણુ બરોબર હોય છે.

૨૭. કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણાવાળા શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબ ઉપરનો ચોરસ, કર્ણના બે ભાગોથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુ બરોબર હોય છે.

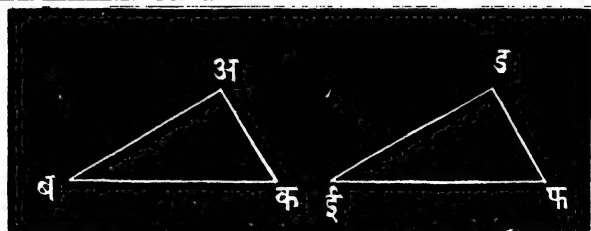
૨૮. સમઢિબાણુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના ગમે તે કોઈ બિંદુ સુધી લીટી દોરવામાં આવે, તો તે લીટી પરનો ચોરસ તથા એક બાણુ પરનો ચોરસ એ બેનો તફાવત પાયાના બે ભાગોથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુની બરોબર હોય છે.

૨૯. અબક ત્રિકોણનો અ ખુણો કાટખુણો છે, અને બર્હ, કફ એ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $૪ (બર્હ^2 + કફ^2) = ૫બક^2$.

૩૦. સમબાણુ ચતુષ્કોણની બાણુઓ પરના ચોરસોના સરવાળો તેમના કર્ણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.

પ્રમેય ૪૫.

કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાણુ પરનો ચોરસ બીજા બે બાણુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય, તો તે બે બાણુઓ વચ્ચેનો ખુણો કાટખુણો હોય છે.



પક્ષ— \triangle અબકમાં $બક^2 = અક^2 + અબ^2$.

સાધ્ય— \angle અ કાટખુણો છે.

રચના—એક ઢર્ફ ત્રિકોણ એવો દોરો, કે તેનો ઢ ખુણો કાટખુણો હોય, અને ઢર્ફ, અથવા બરોબર, અને ડફ, અથવા બરોબર હોય.

સિદ્ધતા— \therefore અથ $=$ ઢર્ફ અને અક $=$ ડફ; (રચના)

$$\therefore \text{ઢર્ફ}^2 + \text{ડફ}^2 = \text{અથ}^2 + \text{અક}^2.$$

પરંતુ $\therefore \angle$ ઢ કાટખુણો છે;

$$\therefore \text{ઢર્ફ}^2 + \text{ડફ}^2 = \text{ઈફ}^2. \quad (\text{પ્ર૦ ૪૪})$$

અને અથ $^2 +$ અક $^2 =$ બક 2 ; (પક્ષ)

$$\therefore \text{બક}^2 = \text{ઈફ}^2.$$

$$\therefore \text{બક} = \text{ઈફ}.$$

હવે, \therefore અથક, ઢર્ફ ત્રિકોણોમાં—

$$\text{અથ} = \text{ઢર્ફ},$$

(રચના)

$$\text{અક} = \text{ડફ},$$

$$\text{બક} = \text{ઈફ},$$

\therefore એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

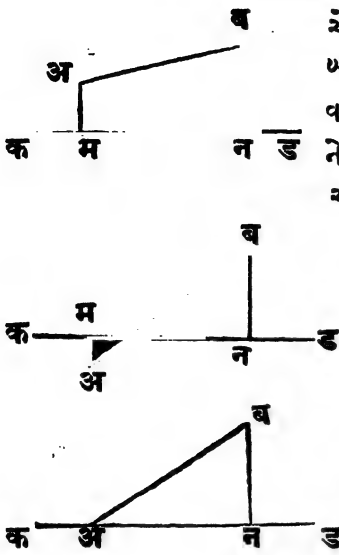
$\therefore \angle$ અ=એક કાટખુણો. (પ્ર૦ ૧૪)

૪૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. અથકક યતુષ્કોણમાં બ ખુણો કાટખુણો છે, અને અક $^2 =$ અથ $^2 +$ બક $^2 +$ કક 2 ; તો સિદ્ધ કરો કે અકક ખુણો કાટખુણો છે.

૨. કોઈ ત્રિકોણમાં (૧) ને એક બાજુ પરનો ચોરસ બીજા બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં મોટો હોય, તો તે બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો પહોળો ખુણો હોય છે, અને (૨) ને એક બાજુ પરનો ચોરસ બીજા બે બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં નાનો હોય, તો બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો સાંકડો હોય છે.

વ્યાખ્યા.—

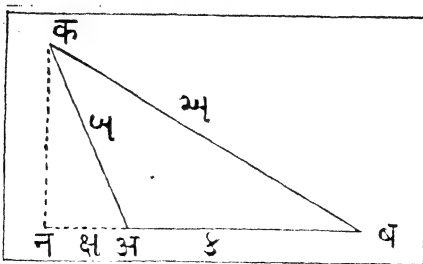


એક લીટીના છેડાઓમાંથી બીજી લીટી પર લંબો દોરવામાં આવે, ત્યારે બીજી લીટીનો જે ભાગ લંબોની વચ્ચેમાં આવતો હોય, તેને પહેલી લીટીની બીજી પરની છાયા કહે છે. બાજુ પરની આકૃતિઓમાં મન એ અબ લીટીની કડ પરની છાયા છે.

આ આકૃતિમાં અન એ અબની કડ પરની છાયા છે.

પ્રમેય ૪૬.

પહોળાખુણુ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ પહોળો ખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં એ બે બાજુઓમાંની એક અને તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુનો બમણાઈ જેટલો મોટો હોય છે.



પક્ષ—અવક પહોળખુણુ ત્રિકોણ છે, ને તેના અ ખુણો પહોળો ખુણો છે. વક બાજુ લંબાવીને તેના પર ક બિંદુ-માંથી કન લંબ દોર્યો છે; અર્થાત્ અન એ અવ પરની કઅની છાયા છે. (વક, કઅ, અવ, અન એ લંબાઈઓ અનુક્રમે અ, બ, ક, અને ક્ષ એકમો છે એમ ધારી લો).

સાધ્ય— $અ^2 = બ^2 + ક^2 + ૨ કક્ષ$.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle$ ન એ કાટખુણો છે.

$$\therefore અ^2 = કન^2 + નવ^2. \quad (૫૦ ૪૪)$$

$$\therefore નવ = (ક્ષ + ક);$$

$$\therefore અ^2 = કન^2 + (ક્ષ + ક)^2.$$

$$પણ (ક્ષ + ક)^2 = ક્ષ^2 + ક^2 + ૨ કક્ષ. \quad (૫૦ ૪૫)$$

$$\therefore અ^2 = કન^2 + ક્ષ^2 + ક^2 + ૨ કક્ષ.$$

પરંતુ $\therefore \angle$ કનઅ એ કાટખુણો છે;

$$\therefore કન^2 + ક્ષ^2 = બ^2.$$

$$\therefore અ^2 = બ^2 + ક^2 + ૨ કક્ષ.$$

ઉપસિદ્ધાંત—પહોળખુણુ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની એક બાજુ તથા તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણ, પહોળા ખુણાની બીજી બાજુ અને તેના પરની પહોળી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બરોબર હોય છે.

૪૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

(૧) અવક ત્રિકોણની અવ=૬"; વક=૧૦"; કઅ=૧૪". અવને લંબાવી તેના પર કમાંથી કડ લંબ દોર્યો છે, અને કવને લંબાવી તેના પર અમાંથી લંબ દોર્યો છે તે તેને ર્માં મળે છે; તો અડ અને કઈની લંબાઈ શોધી કાઢો.

૨. સમબાજુ ત્રિકોણ અવકની વક બાજુને ડ સુધી લંબાવી અ,ડ સાંધ્યાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે

$$અડ^2 = વક^2 + કડ^2 + વક \cdot કડ.$$

૩. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ અવકનો અ ખુણો કાટખુણો છે. કબને લંબાવી તેમાં એક ડ હિંદુ લીધું છે. હવે જો $અડ^2 = ડબ^2 + અબઅ^2$ હોય, તો સિદ્ધ કરો કે ડબ=અક.

૪. એક ત્રિકોણુની બાજુઓ અનુક્રમે ૩, ૫, ૭ છે, તો તે ત્રિકોણુનો મોટામાં મોટો ખુણો કેવડો છે તે કાઢો.

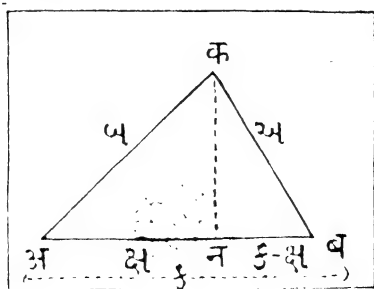
૫. અવક એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુ છે. અક પાયાને સમાંતર દોરેલી એક લીટી સરખી બાજુઓ અબ, અકને ઢ અને ર્ઈમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $અર્ઈ^2 = અર્ઈ^2 + અક \cdot ઢર્ઈ$.

૬. પચર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુની પચ, પર બાજુઓ સરખી છે. જો પર બાજુને સ સુધી લંબાવી રસને પર બરોબર કરવામાં આવે, તો $અસ^2 = રચર^2 + પર^2$.

૭. પદર ત્રિકોણુનો પ એ પહોળો ખુણો છે, અને દસ, રટ લંબાવેલી રપ, દપ પર અનુક્રમે પડતા લંબો છે; તો સિદ્ધ કરો કે $અદર^2 = પદ \cdot દટ + પર \cdot રસ$.

પ્રમેય ૪૭.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં સાંકડા ખુણાની સામેની બાજુ પરનો ચોરસ, સાંકડો ખુણો કરનારી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં, આ બે બાજુઓમાંની એક અને તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણ ચોખુણની બમણાઈ જેટલો આવે છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે. ધારો કે તેની મોટામાં મોટી બાજુ (દાખલા તરીકે અબ) તેનો પાયો છે. શિરો-બિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દોરો. ધારો કે ક શિરોબિંદુમાંથી અબ પર કન લંબ દોર્યો. ત્યારે તો અન એ અકની અબ પરની છાયા થઈ. (અક, કઅ, અબ, અન એ લંબાઈઓને અનુક્રમે અ, બ, ક, ક્ષ નામ આપો).

સાધ્ય— $અ^2 = બ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle કનઅ = 90^\circ$; (રચના)

$\therefore અ^2 = કન^2 + નઅ^2$.

પરંતુ $\therefore નઅ = (ક - ક્ષ)$;

$\therefore નઅ^2 = (ક - ક્ષ)^2$.

$\therefore અ^2 = કન^2 + (ક - ક્ષ)^2$.

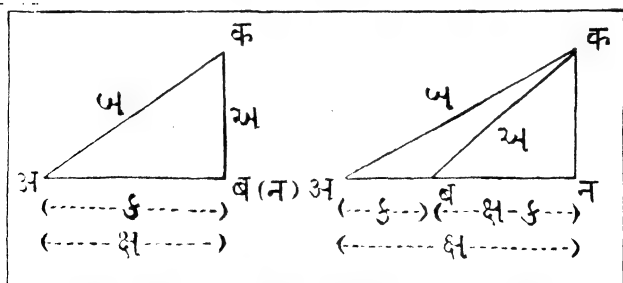
પણ $(ક - ક્ષ)^2 = ક^2 + ક્ષ^2 - ૨કક્ષ$; (પ્રમેય ક)

$\therefore અ^2 = કન^2 + ક્ષ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.

પરંતુ $\therefore \angle કનઅ = 90^\circ$;

$\therefore કન^2 + ક્ષ^2 = બ^2$;

$\therefore અ^2 = બ^2 + ક^2 - ૨કક્ષ$.



(પક્ષમાં જણાવ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણની મોટામાં મોટી બાજુ તરીકે પાયાને ન ગણીએ તો એ બીજી આકૃતિઓ નીકળશે, તે ઉપર કાઢી બતાવી છે).

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણમાં, સાંકડા ખુણા કરનારી બાજુઓમાંની એક તથા તેના પરની બીજી બાજુની છાયા એ બેથી બનતો કાટખુણુ ચોખુણુ તેજ ખુણાની બીજી બાજુ અને તેના પરની પહેલી બાજુની છાયા એ બેથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુની બરોબર છે.

૪૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. અબક સમબાજુ ત્રિકોણની બક બાજુને ૬ સુધી લંબાવીને અડ સાંધવામાં આવે તો $અડ^2 = બક^2 + બડ^2 - બક \cdot બડ$.

૨. સમલંબ ચોખુણુના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, અસમાંતર (તિર્યક) બાજુઓ ઉપરના ચોરસો તથા સમાંતર બાજુઓથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુની બમણાઈ એમના સરવાળાની બરોબર હોય છે.

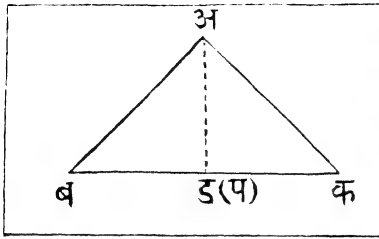
૩. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો ચારે બાજુઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરોબર હોય છે.

૪. ચતુષ્કોણના કર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો તેની સામસામેની બાજુઓના મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટીઓ પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો હોય છે.

૫. અબક ત્રિકોણમાં $અબ^2 + બક \cdot કઅ = બક^2 + કઅ^2$ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $\angle ક = ૬૦^\circ$.

પ્રમેય ૪૮.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં, બે બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો, ત્રીજી બાજુના અર્ધ પરના તથા તે બે બાજુઓ વચ્ચેની મધ્યગા પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ગમે તેવો ત્રિકોણ છે. અડ મધ્યગા છે, તે વકનેડમાં દુભાગે છે.

સાધ્ય—અવ^૨ + અક^૨ = ૨અડ^૨ + ૨અડબ^૨.

સિદ્ધતા—અમાંથી વક પર અપ લંબ દોરો.

(૧) લંબ અને મધ્યગા નો એકબી હોય, અર્થાત્ \angle અડબ અને \angle અડક એ દરેક કાટખુણો હોય, તો

$\therefore \angle$ અપબ અને \angle અપક એ દરેક કાટખુણો છે;

\therefore અવ^૨ = અપ^૨ + પવ^૨; (૫૦૪૪)
(, ,)

અને અક^૨ = અપ^૨ + પક^૨,

\therefore અવ^૨ + અક^૨ = ૨અપ^૨ + પવ^૨ + પક^૨.

પરંતુ પવ = પક; \therefore પવ^૨ + પક^૨ = ૨પવ^૨;

\therefore અવ^૨ + અક^૨ = ૨અપ^૨ + ૨પવ^૨.

પણ પ, ડ પર પડે છે, અથવા અપ, અડ એકબી છે;

\therefore અવ^૨ + અક^૨ = ૨અડ^૨ + ૨અડબ^૨.

(૨) પણ જો અડ, વક પર લંબ નહિ હોય, તો \angle અડવ અને \angle અડક એ-તિર્યક્ ખુણાઓ હોવા જોઈએ. આમાંથી ધારો કે અડવ ખુણો પહોળો ખુણો છે.

હક પર અપ લંબ દોરો. અપ લંબ વક પાયાને અંદર-થી છેદશે અથવા લંબાવવાથી તેના વધારેલા ભાગમાં છેદશે. (આકૃતિ ૨ તથા ૩ જુઓ).

બંને આકૃતિઓમાં $\therefore \angle$ અડવ=પહોળો ખુણો;

$$\therefore અવ^2 = વડ^2 + અડ^2 + ૨ વડ \cdot ડપ. \quad (૫૦ \ ૪૬)$$

અને $\therefore \angle$ અડક=સાંકડો ખુણો;

$$\therefore અક^2 = કડ^2 + અડ^2 - ૨કડ \cdot ડપ. \quad (૫૦ \ ૪૭)$$

$$\text{પણ } \therefore કડ = વડ; \therefore કડ^2 = વડ^2 \text{ અને } ૨કડ \cdot ડપ = ૨ વડ \cdot ડપ.$$

$$\therefore અક^2 = વડ^2 + અડ^2 - ૨વડ \cdot ડપ.$$

$$\text{અને } અવ^2 = વડ^2 + અડ^2 + ૨વડ \cdot ડપ;$$

$$\therefore અવ^2 + અક^2 = ૨ વડ^2 + ૨ અડ^2.$$

ઉપસિદ્ધાંત—જો અ શિરોબિંદુ વકની પાસે તે પાસે જતાં વકમાં અથવા તેના લંબાવેલા ભાગમાં પડે, તો નીચેના પ્રમેય ઉપજશે:—

જો એક સીધી લીટીના બે સરખા અને બે વિષમ ભાગ (અંદરના અથવા બહારના બિંદુમાં*) કરવામાં આવે, તો વિષમ ભાગો ઉપરના ચોરસોના સરવાળો, અડધી લીટી ઉપરના તથા છેદન-બિંદુઓની વચ્ચેની લીટી પરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો થાય છે.

* ધારો કે વકના લંબાવેલા ભાગમાં અ બિંદુ છે. આવા પ્રસંગમાં વક લીટીના બહારના બિંદુમાં બે ભાગ પડેલા છે એમ કહેવાય. પડેલા બે ભાગો વડ અને અડ છે.

$$\overline{\text{બ}} \quad \overline{\text{ડ}} \quad \overline{\text{અ}} \quad \overline{\text{ક}} \quad \overline{\text{બ}} \quad \overline{\text{ડ}} \quad \overline{\text{ક}} \quad \overline{\text{અ}}$$

$$(\text{અવ}^2 + \text{અક}^2) = ૨(\text{બડ}^2 + \text{ડઅ}^2).$$

૪૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. અવકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કણો એક બીજાને ગમાં છેદે છે અને એ ચતુષ્કોણની અંદર ગમે તે એક પ બિંદુ લીધું છે; તો સાબીત કરો કે

$$\text{પઅ}^2 + \text{પવ}^2 + \text{પક}^2 + \text{પડ}^2 = \text{અવ}^2 + \text{વક}^2 + ૪ \text{ પગ}^2.$$

૨. ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળાનું ત્રણગણું મધ્યગાઓ પરના ચોરસોના સરવાળાના ચારગણા બરાબર હોય છે.

૩. જો અવક ત્રિકોણનું ગ ગુરુત્વમધ્યબિંદુ (મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ) હોય, તો સાબીત કરો કે

$$૩(\text{ગઅ}^2 + \text{ગવ}^2 + \text{ગક}^2) = \text{અવ}^2 + \text{વક}^2 + \text{કઅ}^2.$$

૪. કોઈ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળો, તેના કણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં કણોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી લીટી પરના ચોરસના ચારગણા જેટલો વધારે હોય છે.

૫. જો કોઈ ચતુષ્કોણની ચારે બાજુ પરના ચોરસોના સરવાળો તેના કણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ હોય છે.

૬. અવક ત્રિકોણનું ગ ગુરુત્વમધ્યબિંદુ છે, અને ડ એ અગતું મધ્યબિંદુ છે; તો $\text{ડવ}^2 + \text{ડક}^2 = \text{અવ}^2 + \text{અક}^2 - ૧૦ \text{ અડ}^2$.

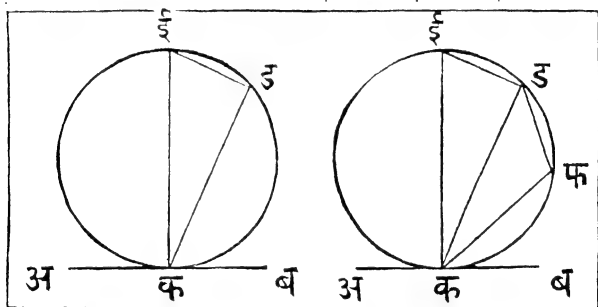
૭. અવકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અક ને વડ કણો છે. પ એક એવું બિંદુ છે કે $\text{પઅ}^2 + \text{પક}^2 = \text{પવ}^2 + \text{પડ}^2$ છે; તો સાબીત કરો કે અવકડ એ કાટખુણ ચોખુણ છે.

૮. એક વર્તુળમાં કડ જ્યાં અબ વ્યાસને સમાંતર છે. પ એ અબમાં લીધેલું ગમે તે બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે $અપ^2 + બપ^2 = કપ^2 + ડપ^2$.

(હવે પછીનો પ્રમેય ક્ષેત્રફળ સંબંધી નથી, પણ ક્રમમાં અહીં આવતો હોવાથી આ પ્રકરણમાં દાખલ કરવામાં આવ્યો છે.)

પ્રમેય ૪૯.

વર્તુળની સ્પર્શલીટીના સ્પર્શબિંદુમાંથી દારેલી કોઈ પણ જ્યાં સ્પર્શલીટી સાથે જે ખુણા કરે છે, તે દરેક, વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંના ખુણા બરોબર હોય છે.



પક્ષ—કઈડ આપેલું વર્તુળ છે. અકબ વર્તુળની સ્પર્શલીટી છે. કડ એ સ્પર્શબિંદુમાંથી દારેલી જ્યાં છે.

સાધ્ય—(૧) $\angle વકડ = \text{વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો } \angle કઈડ$.

(૨) $\angle અકડ = \text{વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો } \angle કફડ$.

સિદ્ધતા—

પ્રકાર ૧—ધારો કે વકડ સાંકડો ખુણો છે (આકૃતિ ૧ જુઓ).

રચના—ક સ્પર્શબિંદુમાંથી કઈ લંબ દારો. ધારો કે તે પરિધને ઈ બિંદુમાં મળે છે.

∴ અકડ સ્પર્શલીટી છે, અને કઈ સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ છે;

∴ કઈ એ વ્યાસ છે. (પ્ર૦ ૩૬. ઉ૦ ૨)

∴ કઈડ એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ \angle કઈડ એ કાટખુણો છે. (પ્ર૦ ૪૦)

∴ કઈડ ત્રિકોણમાં, \angle કઈડ = ૧ કાટખુણો;

∴ \angle કઈડ + \angle ડકઈ = ૧ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૮)

હવે, ∴ \angle બકડ + \angle ડકઈ = ૧ કાટખુણો; (રચના)

∴ \angle બકડ + \angle ડકઈ = \angle કઈડ + \angle ડકઈ.

આ સમીકરણમાંથી સામાન્ય ખુણો ડકઈ કાઢી લઈએ, તો બાકીનો \angle બકડ = \angle કઈડ.

પ્રકાર ૨—ધારો કે \angle અકડ પહોળો ખુણો છે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

રચના—કઈડ કોંસમાં એક ર્ધ બિંદુ લો, અને કફડ કોંસમાં ફ બિંદુ લો. ર્ધક, , કફ, ડફ સાંધો.

∴ કફડર્ધ એ કફડર્ધ વર્તુળમાં દોરેલો ચતુષ્કોણ છે;

∴ \angle કઈડ + \angle કફડ = ૨ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૩૨)

પરંતુ \angle બકડ + \angle અકડ = ૨ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૧)

∴ \angle બકડ + \angle અકડ = \angle કઈડ + \angle કફડ.

પણ \angle બકડ = \angle કઈડ; (પ્ર૦ ૪૯ પ્રકાર ૧)

∴ ઉપલા સમીકરણમાંથી એ બંને સમાન વસ્તુઓ બાદ કરતાં બાકીનો \angle અકડ = \angle કફડ.

૪૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળખંડના કોંસના મધ્યબિંદુમાંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી તે વર્તુળખંડની જ્યાં સમાંતર હોય છે.

૨. વર્તુળખંડની જ્યાં સમાંતર દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી વર્તુળખંડના કોંસને સ્પર્શબિંદુમાં દુભાગે છે.

૩. એક બહારના બિંદુ અમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી અબ, અક લીટીઓ દોરેલી છે. હ એ વર્તુળ પર આવેલું અબક ત્રિકોણની બહારનું બિંદુ છે; તો સાખીત કરો કે અબહ તથા અકહ ખુણાઓનો સરવાળો નિત્ય* છે.

૪. એક બહારના બિંદુ અમાંથી દોરેલી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી અપ, અદ લીટીઓ છે. બ એ પદ કૌંસનું મધ્યબિંદુ છે; તો સાખીત કરો કે પબ લીટી અપદ ખુણાને દુભાગે છે.

૫. અબ એક વર્તુળની જ્યા છે; તો ખતાવી આપો કે અ બિંદુમાંથી દોરેલો વ્યાસ અને બ બિંદુમાંથી દોરેલી સ્પર્શ-લીટી પર અ બિંદુમાંથી દોરેલો લંબ એ બંનેની વચમાંના ખુણાને અબ જ્યા દુભાગે છે.

૬. પ્રમેય ૪૯ માનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. વર્તુળનો બઅ વ્યાસ પ સુધી લંબાવેલો છે, અને અપને વર્તુળની ત્રિજ્યા બરોબર કરી છે. અ અને પમાંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી અહ ને પક લીટીઓ દોરેલી છે, તે એક બીજીને ઈમાં છેદે છે. બક સાંધો અને હમાં અઈને મળે ત્યાં સુધી લંબાવો, ને ખતાવી આપો કે હઈક એ સમખાળુ ત્રિકોણ છે.

૮. એક વર્તુળની અબ જ્યા છે, અને અહ સ્પર્શલીટી છે. અહમાંના એક હ બિંદુમાંથી અબને સમાંતર એક એવી લીટી દોરી છે કે તે વર્તુળને પ અને સ બિંદુમાં છેદે છે; તો ખતાવી આપો કે અપહ ને અબસ ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૯. જો અબ કૌંસનું મ એ મધ્યબિંદુ હોય, તો ખતાવી આપો કે અબ પર અને અ બિંદુમાંથી જનારી સ્પર્શલીટી પર મમાંથી દોરેલા લંબો બરાબર છે.

* નિત્ય=કદી નહિ બદલાતો, અર્થાત્ એકજ મહત્ત્વવાળો.

૧૦. જે વર્તુળો એક બીજાને (અંદરથી અથવા બહારથી) સ્પર્શ કરે છે, અને તેમના સ્પર્શબિંદુમાંથી જે લીટીઓ બંને વર્તુળોને છેદે એવી રીતે દોરેલી છે; તો એક વર્તુળનાં છેદન-બિંદુઓને જોડનારી લીટી બીજા વર્તુળનાં છેદનબિંદુઓને જોડનારી લીટીને સમાંતર છે એમ સાબીત કરો.

૧૧. જો જે વર્તુળો એક બીજાને સ્પર્શ કરતાં હોય, તો બતાવી આપો કે સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી કોઈ પણ લીટી સરખ* વર્તુળખંડો કાપી કાઢે છે.

૧૨. જે વર્તુળો એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરે છે, અને મોટા વર્તુળની એક જ્યાં અંદરના વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી છે; તો તે લીટીના સ્પર્શબિંદુ આગળ જે જે ભાગ પડે છે તે ભાગો વર્તુળના સ્પર્શબિંદુ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે.

૧૩. એક બીજાને અંદરથી સ્પર્શ કરનાર વર્તુળોને છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવે, તો તે જે વર્તુળોની વચ્ચે આવેલા તે લીટીના ગાળાઓ વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુ સાથે સરખા ખુણાઓ કરે છે.

૧૪. જે વર્તુળો એક બીજાને છેદે છે, અને તેમાંનું એક બીજા વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થાય છે; તો સિદ્ધ કરો કે એક છેદનબિંદુ આગળ એમાંના એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી તથા સામાન્ય જ્યાં એ જે વચ્ચેનો ખુણો, તે છેદનબિંદુને બીજા વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી વડે દુભાગાય છે.

૧૫. જો જે વર્તુળો એક બીજાને છેદતાં હોય, તો સામાન્ય સ્પર્શલીટી છેદનબિંદુઓ સાથે જે ખુણા કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

૧૬. એક બીજાને છેદનારાં જે વર્તુળોની જે સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓ એક છેદનબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

* જેમાંના ખુણાઓ સરખા હોય તેમને સરખ વર્તુળખંડો કહે છે.

૧૭. બે વર્તુળો એક બીજાને અ તથા બમાં છેદે છે. બ આગળ એક વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી બીજા વર્તુળના પરિધને હમાં છેદે છે. અમાંથી બંને વર્તુળોને અનુક્રમે ગ અને હમાં છેદનારી એક લીટી દોરવામાં આવી છે; તો સાબીત કરો કે બગ અને હહ એક બીજાને સમાંતર છે.

૧૮. બે વર્તુળો એક બીજાને પ તથા ઘમાં છેદે છે. મપન લીટી વર્તુળોને મ તથા નમાં છેદે છે. મ અને નમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ ટમાં એક બીજાને મળે છે; તો બતાવી આપો કે મ,ઘ,ન,ટ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૧૯. અબકટ એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, અને તેના કણો એક બીજાને ર્માં છેદે છે. અ,બ,ને ર્માં થઈને પસાર થનારું એક વર્તુળ દોર્યું છે; તો સિદ્ધ કરો કે ર્ આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટી કહને સમાંતર છે.

૨૦. અબ અને અક લીટીઓ બ ને ક આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે. બે હ એ બક કૌંસનું મધ્યબિંદુ હોય, તો સાબીત કરો કે હ એ અબક ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨૧. અકબ ત્રિકોણમાં બ ખુણા અ ખુણા કરતાં મોટો છે. અકબ ખુણાને દુભાગનારી કઈ લીટી અબને ર્માં મળે છે. અબ લંબાવીને તેમાં હ બિંદુ એવું લીધું છે કે \angle ર્કઈહ $= \angle$ કઈહ છે; તો સિદ્ધ કરો કે કહ લીટી અબક ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૨૨. અબ લીટીનાં ક,હ બિંદુઓમાં ત્રણ સરખા ભાગ કર્યા છે. કહ પર પકહ એક સમબાણુ ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો સાબીત કરો કે બ,ક,પમાંથી પસાર થતા વર્તુળને અપ સ્પર્શ કરે છે.

૨૩. અબ, અક એક વર્તુળની જ્યાઓ છે. અ આગળ સ્પર્શ કરનારી લીટીને સમાંતર બહ દોરી છે, ને તે અકને

હમાં મળે છે; તો સાખીત કરો કે \angle અબહ અને \angle વકહ સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે, અને વ,ક,હમાંથી પસાર થતા વર્તુળને અવ લીટી વમાં સ્પર્શ કરે છે.

૨૪. અવ એક વર્તુળની જ્યા છે. વ આગળ એક સ્પર્શ-લીટી દોરી છે, અને તેના પર અમાંથી લંબ દોર્યો છે. વ આગળ અવ પર પણ એક લંબ દોર્યો છે. આ બે લંબો એક બીજાને કમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે અક વર્તુળના વ્યાસ બરોબર છે.

૨૫. એક વર્તુળને વ આગળ સ્પર્શ કરનારી લીટી બીજા વર્તુળની દર જ્યાને સમાંતર છે. પદ, પર પહેલા વર્તુળને સ,ટમાં અને બીજા વર્તુળને મ,નમાં છેદે છે; તો સાખીત કરો કે સટ અને મન સમાંતર છે.

૨૬. મ એ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. મઅ, મવ ત્રિજ્યાઓ એક બીજા સાથે કાટખુણો કરે છે. મઅને લંબાવી છે અને તેને વમાંથી દોરેલી એક વપ જ્યા નમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે વઅ એ અનવ ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૨૭. અવ કૌંસના પમાં એવા બે ભાગ પડે છે કે વપ કૌંસ પવ કૌંસથી બમણો છે. અમાંથી અવ પર અદ લંબ દોર્યો છે. પમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટી આ લંબને તથા લંબાવેલી અવને દ તથા રમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે દપ = પર.

૨૮. એક વર્તુળની અવ, અહ જ્યાઓ બીજા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે, અને તે બીજા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ક પહેલા વર્તુળના પરિધ પર છે; તો બતાવી આપો કે ક આગળની સ્પર્શલીટી વહને સમાંતર છે.

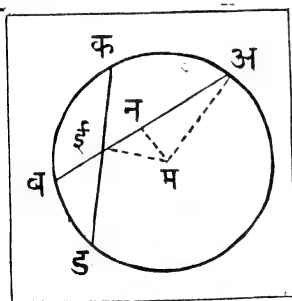
૨૯. બે વર્તુળો એક બીજાને મ આગળ અંદરથી સ્પર્શ કરે છે. અવકહ જ્યા બહારના વર્તુળને અ તથા હમાં

અને અંદરના વર્તુળને **ક** તથા **ક**માં છે છે. **મ**અ, **મ**ડ અંદરના વર્તુળને **ચ**, **ર**માં છે છે, અને **મ**વ, **મ**કને લંબાવવાથી તેઓ બહારના વર્તુળને **લ**, **વ**માં છે છે; તો સિદ્ધ કરો કે ચર લીટી લવને સમાંતર છે.

૩૦. બે વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે. અડધક લીટી એક વર્તુળને **અ** અને **ક**માં અને બીજાને **ક** તથા **ક**માં છે છે; તો સાબીત કરો કે અવ અને ડક લીટીઓ બંને વર્તુળોના સ્પર્શબિંદુ સાથે જે ખુણાઓ કરે છે તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

પ્રમેય ૫૦.

જો એક વર્તુળની બે જ્યાઓ એક બીજાને વર્તુળની અંદર અથવા વર્તુળની બહાર છેદતી હોય, તો એક જ્યાના પડેલા બે ભાગોથી થતા કાટખુણાઓ બીજા બે ભાગોથી થતા કાટખુણાઓની બરાબર છે.



પક્ષ—અવ, કડ એક વર્તુળની જ્યાઓ છે. તે એક બીજાને **ક**માં છે છે. (આ બિંદુ **ક** વર્તુળની અંદર હોય અથવા બહાર પણ હોય).

સાધ્ય—અક. કવ = કક. કડ.

રચના—મ મધ્યબિંદુ.

માંથી અવ પર લંબ દોરો; અને તે અવને નમાં મળે છે એમ ધારો. મક, મઅ સાંધો.

સિદ્ધતા—(૧) ધારો કે **ક** વર્તુળની અંદર છે.

∴ મન એ અવ પર લંબ છે;

∴ નઅ = નવ.

(પ્ર૦ ૩૧).

$$\therefore \text{અઈ} = \text{અન} + \text{નઈ},$$

$$\text{અને } \text{ઈવ} = \text{નવ} - \text{નઈ} = \text{અન} - \text{નઈ};$$

$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = (\text{અન} + \text{નઈ}) (\text{અન} - \text{નઈ}).$$

$$\therefore (\text{અન} + \text{નઈ}) (\text{અન} - \text{નઈ}) = \text{અન}^2 - \text{નઈ}^2; \text{ (૫૦૬);}$$

$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = \text{અન}^2 - \text{નઈ}^2.$$

અન^૨માં મન^૨ ઉમેરો અને નઈ^૨માંથી મન^૨ બાદ કરો. આમ કરવાથી ઉપલા સમીકરણની જમણી બાજુની કિંમતમાં ફેર પડશે નહિ.

$$\text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = \text{અન}^2 + \text{મન}^2 - \text{નઈ}^2 - \text{મન}^2;$$

$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = (\text{અન}^2 + \text{મન}^2) - (\text{નઈ}^2 + \text{મન}^2).$$

$$\therefore \angle \text{અનમ} = \text{કાટખુણો};$$

$$\therefore \text{અન}^2 + \text{મન}^2 = \text{અમ}^2, \text{ તેમજ } \text{નઈ}^2 + \text{મન}^2 = \text{મઈ}^2;$$

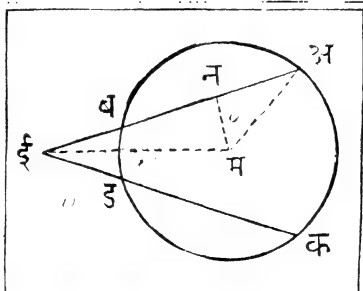
$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = \text{અમ}^2 - \text{મઈ}^2;$$

$$= \text{ત્રિજ્યા}^2 - \text{મઈ}^2.$$

એજ પ્રમાણે કઈ·ઈડ = ત્રિજ્યા^૨ - મઈ^૨ સિદ્ધ થશે.

$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = \text{કઈ} \cdot \text{ઈડ}.$$

(૨) ધારો કે ઈ વર્તુળની બહાર છે.



$$\therefore \text{અઈ} = (\text{ઈન} + \text{નઅ}); \text{ અને}$$

$$\text{વઈ} = (\text{ઈન} - \text{નવ}) = (\text{ઈન} - \text{નઅ});$$

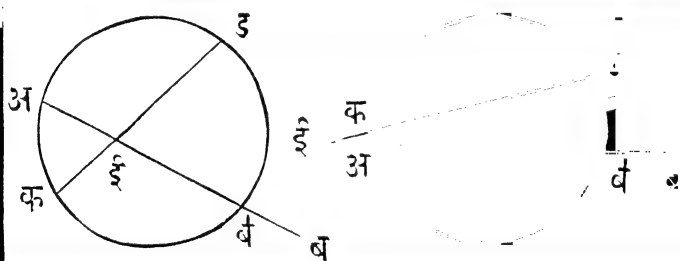
$$\begin{aligned}
 \therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} &= (\text{ઈન} + \text{નઅ}) (\text{ઈન} - \text{નઅ}), \\
 &= \text{ઈન}^2 - \text{નઅ}^2, \quad (\text{પ્ર૦.૬}) \\
 &= (\text{ઈન}^2 + \text{નમ}^2) - (\text{નઅ}^2 + \text{નમ}^2), \\
 &= \text{ઈમ}^2 - \text{અમ}^2, \\
 &= \text{ઈમ}^2 - \text{ત્રિજ્યા}^2.
 \end{aligned}$$

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થશે કે $\text{કઈ} \cdot \text{ઈડ} = \text{ઈમ}^2 - \text{ત્રિજ્યા}^2$;

$$\therefore \text{અઈ} \cdot \text{ઈવ} = \text{કઈ} \cdot \text{ઈડ}.$$

પ્રમેય ૫૧.

જો બે અંતવાન સીધી લીટીઓ એક બીજાને (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) છેદતી હોય, અને એકના ભાગેથી થએલા કાટખુણુ ચોખુણુ બીજાના ભાગેથી થએલા કાટખુણુ ચોખુણુની બરોબર હોય, તો તે બંને લીટીના છેડાનાં બિંદુઓ ચક્રીય છે.



પક્ષ—અવ, કડ અંતવાન લીટીઓ છે, અને તે (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) એક બીજાને ઈમાં છેદે છે, અને અઈ·ઈવ=કઈ·ઈડ.

સાધ્ય—અ,વ,ક,ડ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

સિદ્ધતા—અ,ક,ડ એ ત્રણ બિંદુઓમાં થઈને પસાર થાય એવું એકજ વર્તુળ દોરી શકાશે. (પ્ર૦ ૩૨)

જો આ વર્તુળ ચમાં થઈને પણ પસાર થતું ન હોય, તો તેને

અવને અથવા અવના લંબાવેલા ભાગને વર્ગમાં છેદવા દો. ત્યારે
 ∴ અવ, કડ વર્તુળની બાહ્યો છે,

$$\therefore કઈ \cdot ઈડ = અઈ \cdot ઈવ.$$

(૫૦ ૫૦)

$$\text{પણ } કઈ \cdot ઈડ = અઈ \cdot ઈવ;$$

(૫૧)

$$\therefore અઈ \cdot ઈવ = અઈ \cdot ઈવ;$$

$$\therefore ઈવ = ઈવ;$$

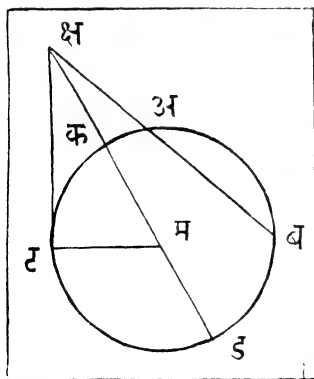
∴ વ, વ બિંદુઓ બે જુદી જુદી સ્થિતિમાં હોઈ શકે
 નહિ, અર્થાત્ તેઓ એક બીજા પર પડે છે.

∴ અકડ વર્તુળ વર્ગમાં થઈને પસાર થાય છે.

∴ અ,વ,ક,ડ બિંદુઓ ચક્રીય છે.

પ્રમેય પર.

જો વર્તુળ બહારના કોઈ બિંદુમાંથી બે લીટીઓ
 એવી રીતે દારવામાં આવે કે એક તે વર્તુળને
 સ્પર્શ કરે અને બીજી તે વર્તુળને છેદે, તો વર્તુળને
 છેદનારી આખી લીટી અને તેના વર્તુળ બહારના
 ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ વર્તુળને સ્પર્શ કર-
 નારી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય છે.



પક્ષ—અવક વર્તુળની
 બહાર એક ક્ષ બિંદુ છે,
 અને તેમાંથી ક્ષઅવ અને
 ક્ષટ લીટીઓ દોરી છે.
 આમાંની ક્ષઅવ વર્તુળને
 છેદે છે, અને ક્ષટ વર્તુળ
 ને સ્પર્શ કરે છે.

સાધ્ય—વક્ષ · ક્ષઅ =
 ક્ષટ ઉપરનો ચોરસ,

અર્થાત્ ક્ષટ^૨.

રચના—ધારો કે મ વર્તુળનું મધ્યાખંડ છે. ક્ષ,મ સાંધો અને ક્ષમને લંબાવો. ધારો કે તે પરિધને ક ને હમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા— \therefore અબ, કહ ન્યાઓ વર્તુળ બહાર ક્ષ બિંદુમાં મળે છે;

$$\therefore \text{બક્ષ} \cdot \text{ક્ષઅ} = \text{ક્ષમ}^2 - \text{ત્રિજ્યા}^2. \quad (\text{પ્ર૦ ૫૦, ભાગ ૨})$$

$$= \text{ક્ષમ}^2 - \text{મટ}^2.$$

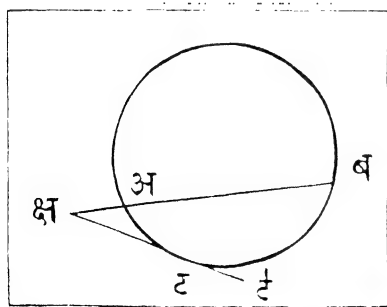
પણ \therefore ક્ષટમ એ કાટખુણો છે; (પ્ર૦ ૩૬)

$$\therefore \text{ક્ષમ}^2 - \text{મટ}^2 = \text{ક્ષટ}^2.$$

$$\therefore \text{બક્ષ} \cdot \text{ક્ષઅ} = \text{ક્ષટ}^2.$$

પ્રમેય ૫૩.

જો વર્તુળ બહારના કોઈ બિંદુમાંથી એ સીધી લીટીઓ એવી દ્વારવામાં આવે કે એક વર્તુળને મળે અને બીજી વર્તુળને છેદે, અને જો વર્તુળને છેદનારી આખી લીટી અને તેના વર્તુળ બહારના ભાગથી થતો કાટખુણ ચોખુણ વર્તુળને મળનારી લીટી પરના ચોરસ બરોબર હોય, તો તે મળનારી લીટી વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.



પક્ષ—વર્તુળ બહારના ક્ષ બિંદુમાંથી વર્તુળને છેદનારી એક ક્ષઅબ લીટી દોરેલી છે. ક્ષ બિંદુમાંથી એક બીજી લીટી વર્તુળને ટમાં મળે એમ એવી રીતે

દોરી છે કે ક્ષટ ઉપરનો ચોરસ = ક્ષઅ · ક્ષવ છે.

સાધ્ય.—ક્ષટ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

સિદ્ધતા—જે ક્ષટ વર્તુળને સ્પર્શ કરતી ન હોય, તો ખુલ્લું છે કે તે લંબાવવાથી વર્તુળને છેદશે. ધારે કે તે વર્તુળને ફરીથી ટુંમાં છેદે છે. ત્યારે—

∴ અબ, ટટ એ જ્યાઓ ક્ષમાં મળે છે;

∴ ક્ષટ·ક્ષટ=ક્ષઅ·ક્ષબ.

(૫૦ ૫૦)

પણ ક્ષઅ·ક્ષબ=ક્ષટ^૨;

(૫૧)

∴ ક્ષટ·ક્ષટ=ક્ષટ^૨;

∴ ક્ષટ·ક્ષટ=ક્ષટ·ક્ષટ.

ક્ષટ એ સાધારણ અવયવ કાઢી લઈએ તો

ક્ષટ=ક્ષટ;

માટે ટ અને ટ એ બે બિંદુઓ જુદાં નથી પણ એકજ છે; અર્થાત્ ક્ષટ લીટીને લંબાવતાં તે વર્તુળને છેદી શકશે નહિ, એટલે કે તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

પ્રમેય ૫૦થી ૫૩ પરના પ્રશ્નો.

૧. અબકઢ એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. તેની બઅ ને કઢ બાજુઓને લંબાવતાં તેઓ મ બિંદુમાં મળે છે; તો સાબીત કરો કે મઅ·મબ = મક·મક.

૨. જો બે વર્તુળો એક બિંદુમાં છેદતાં હોય, તો સિદ્ધ કરો કે (૧) તેમની સામાન્ય જ્યા તેમની સામાન્ય સ્પર્શ-લીટીને દુભાગે છે; અને (૨) સામાન્ય જ્યાના લંબાવેલા ભાગમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓ બરોબર છે.

૩. મ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. મક તેની ત્રિજ્યા છે. વર્તુળ બહારના એક ક ઢ બિંદુમાંથી મક પર કઢ લંબ દોરેલો છે. ક,ક સાંધનારી લીટી વર્તુળને બમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કક·કબ = ૨મક·કઢ.

૪. અવક ત્રિકોણનો અ ખુણો સાંકડો ખુણો છે. ચક્રને વ્યાસ તરીકે લઈ એક વર્તુળ દોરેલું છે. જે અમાથી તેને સ્પર્શ કરનારી અડ લીટી દોરવામાં આવે, તો સિદ્ધ કરી આપો કે $અવ^2 + અક^2 = ચક્ર^2 + ૨અડ^2$.

૫. એક વર્તુળના પરિધ પર અ,ચ,ક ત્રણ બિંદુઓ છે. પ એ ચક્ર જ્યાં મધ્યબિંદુ છે; અને મ વર્તુળનું મધ્ય-બિંદુ છે. ચક્રને ચમાં છેદનારી એક અચલ જ્યા દોરી છે; તો ખતાવી આપો કે અચ-ચલ એ કાટખુણુ ચોખુણુ ($અમ^2 - મપ^2$) કરતાં મોટો નથી.

૬. અચકડ અને ર્ચકફ વર્તુળો એક બીજાને ચ ને કમાં છેદે છે. અર્ચ, ડફ તેમને સ્પર્શ કરનારી સામાન્ય લીટીઓ દોરેલી છે, અને ચક્ર સામાન્ય જ્યા છે, જે લંબાવ-તાં સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓને ગ અને હમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $ગહ^2 = અર્ચ^2 + ચક્ર^2$.

૭. બે વર્તુળો એક બીજાને છેદે છે, અને તેમની સામાન્ય જ્યાને લંબાવી તેમાં એક પ બિંદુ લીધું છે. પડ, પઅ તે વર્તુળોની સ્પર્શલીટીઓ છે; તો ખતાવી આપો કે અડ લીટી વડે બંને વર્તુળોના જે ખંડો પડે છે તે સરખા છે.

૮. અચ એક વર્તુળનો વ્યાસ છે. અકડ અને ચકર્ચ એ જ્યાઓ વર્તુળની અંદર એક બીજાને છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $અક \cdot અડ + ચક \cdot ચર્ચ = અચ^2$.



પ્રકરણ ૨.

નિધાન (અથવા બિંદુમાર્ગ).

એક અ બિંદુ લો. તેનાથી એક ઇંચ દૂર એક બીજું બિંદુ લો. આવાં બિંદુઓ કેટલાં લઈ શકાશે ? ‘ અસંખ્ય. ’ આ બિંદુઓથી કેવી આકૃતિ બનશે ? ‘ વર્તુળ. ’

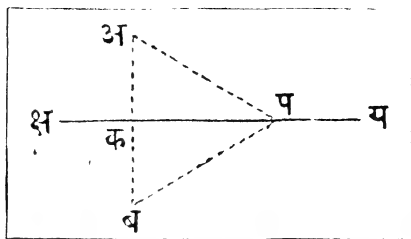
એક કાગળના કડકા પર અ,બ ગમે તે બિંદુઓ લો, અને કાગળને એવી રીતે વાળો કે અ બિંદુ બ પર પડે. પડેલા સળમાં ગમે તે એક બિંદુ લો. અ,બ બિંદુઓથી આ બિંદુનું અંતર સરખું છે કે ઓછુંવતું છે ? સળવાળી લીટીમાં એક બીજું બિંદુ લો. અ,બ બિંદુઓથી આ બિંદુનું અંતર સરખું છે કે ઓછુંવતું છે ?...(પુઠો).

અ,બ બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવાં બંને તેટલાં બિંદુઓ લો. એવાં કેટલાં બિંદુઓ લઈ શકાશે ? આ બિંદુઓથી કેવી આકૃતિ થશે ? ‘ સીધી લીટી. ’

ઉપલા બે પ્રયોગોમાં બતાવ્યા મુજબ જ્યારે તમને કેટલીક ચોક્કસ શરતો પાળતું હોય એવું બિંદુ લેવાનું કહેવામાં આવે, અને એવી શરતો પાળનાર અનેક બિંદુઓ લઈ શકાતાં હોય તથા તે બિંદુઓથી લીટી બનતી હોય, ત્યારે તે લીટીને તે બિંદુનો માર્ગ એટલે બિંદુમાર્ગ અથવા નિધાન કહે છે.

પ્રમેય ૫૪.

બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી લીટીને દુશાગનાર લંબ છે.



પક્ષ—અ,વ બે આપેલાં બિંદુઓ છે. ક્ષય એક એવી લીટી છે કે તેમાં કોઈ પ બિંદુ લેવામાં આવે તો $પઅ = પવ$ થાય છે.

સાધ્ય—ક્ષય લીટી અબને દુભાગનાર લંબ છે.

રચના—અબ સાંધો. અબનું મધ્યબિંદુ ક લો.

સિદ્ધતા—અ,વથી સરખે અંતરે રહે એવાં બધાં બિંદુઓ ક્ષય લીટીમાં છે. ક બિંદુ અ તથા વથી સરખે અંતરે છે, માટે ક બિંદુ ક્ષય લીટીમાં છે, અર્થાત્ ક્ષય લીટી ક બિંદુમાં થઈને જાય છે, અથવા ક્ષય લીટી અબને દુભાગે છે.

(પઅ, પવ સાંધો).

∴ \triangle અપક અને \triangle વપકમાં—

અક = વક;

(રચના)

કપ સામાન્ય છે;

અપ = વપ;

(પક્ષ)

∴ એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર૦ ૧૪)

∴ \angle અકપ = \angle વકપ = ૧ કાટખુણો;

અર્થાત્ પક લીટી અબ પર લંબ છે.

∴ પ,ક બિંદુઓ ક્ષય લીટીમાં છે;

∴ ક્ષય લીટી અબને દુભાગનાર લંબ છે.

વ્યત્યાસ—બે આપેલાં બિંદુઓને જોડનારી લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

પક્ષ—જા અને બ એ આશ્રેલાં બિંદુઓ છે. અ,ક સાંધીને અથવા લીટીને કમાં હુભાગી છે. ક બિંદુમાંથી અ,ક પર કય સ્તંભ દોરેલો છે.

સાધ્ય—ક,બમાંનું કોઈ પણ બિંદુ અ,કથી સરખે અંતરે છે.

રચના—કયમાં એક વ બિંદુ લો. અ,ક,બ,ક સાંધો.

સિદ્ધતા— \therefore પઅક ને પબક ત્રિકોણોમાં—

અક = બક, (પક્ષ)

કપ સામાન્ય છે,

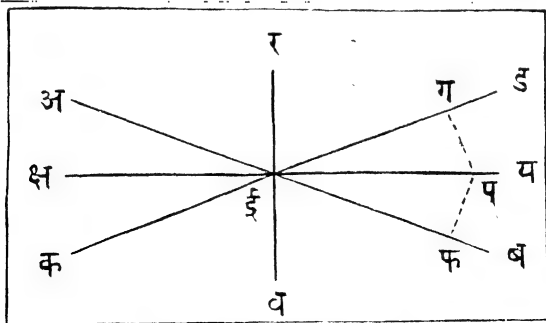
\angle પકઅ = \angle પકબ; (કાટખુણાઓ)

\therefore પઅ = પબ. (પ૦ ૧૦)

એજ પ્રમાણે કયમાંનું કોઈ પણ બિંદુ અ,કથી સરખે અંતરે છે એમ સાબીત કરી શકાશે.

પ્રમેય ૫૫.

એક બીજીને છેદનારી બે લીટીઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન, તે બે લીટીઓ વચ્ચેના ખુણાઓને હુભાગનારી બે લીટીઓ હોય છે.



પક્ષ—અ,ક,બ,ક એક બીજીને છેદનારી લીટીઓ છે. તેમનાથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન કય છે;

અર્થાત્ ક્ષયમાં કોઈ પણ પ બિંદુ લઈ તેમાંથી અર્ધ
તથા કર્દહ પર દોરેલા પફ,પગ લંબો સરખા છે.

સાધ્ય—ક્ષય લીટી \angle કર્દહને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા— \therefore ઈ બિંદુ અર્ધ તથા કર્દહ બંને લીટીમાં
સામાન્ય છે;

\therefore તે બંનેથી સરખે અંતરે છે.

\therefore અર્ધ અને કર્દહ લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય
એવાં સધળાં બિંદુઓ ક્ષયમાં છે; માટે ઈ બિંદુ ક્ષયમાંજ
હોવું જોઈએ, અર્થાત્ ક્ષય લીટી ઈ બિંદુમાં થઈને જાય છે.

હવે \therefore પર્ફ અને પર્ફગ કાટખુણા ત્રિકોણોમાં—

પર્ફ એ. સામાન્ય કર્ણ છે;

અને પફ બાજુ = પગ બાજુ, (પક્ષ)

\therefore એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૫)

$\therefore \angle$ પર્ફ = \angle પર્ફગ.

વ્યત્યાસ—એક બીજીને છેદનારી બે લીટીઓ
વચ્ચેના ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ
બિંદુ, આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

પક્ષ—અબ, કહ વચ્ચેના ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં
ગમે તે એક પ બિંદુ છે.

સાધ્ય—પફ લંબ = પગ લંબ.

સિદ્ધતા— \therefore પર્ફ ને પર્ફગ ત્રિકોણોમાં—

\angle પર્ફ = \angle પર્ફગ, (પક્ષ)

\angle પફર્ફ = પગર્ફ, (કાટખુણા)

અને પર્ફ સામાન્ય છે;

\therefore એ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર૦ ૧૧)

\therefore પફ = પગ.

\therefore પ બિંદુ અબ,કહ લીટીઓથી સરખે અંતરે છે.

(ઉપલા પ્રમેયમાં અને તેના વ્યત્યાસમાં જે ક્ષય લીટીના સંબંધમાં સિદ્ધ કર્યું છે, તેજ રચના સંબંધમાં પણ સિદ્ધ થઈ શકશે).

૫૪, ૫૫ પ્રમેયો પરના પ્રશ્નો.

૧. એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીથી આપેલી અંતવાન સીધી લીટી જેટલે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ? એવાં નિધાન કેટલાં થઈ શકે ?

૨. બે સમાંતર લીટીઓથી સરખે અંતરે રહે એવાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૩. આપેલી લીટી જેમનો પાયો હોય, અને પાયાના છેડાના એકજ બિંદુમાં મળનારી જેમની બાજુઓમાંની દરેક લીટી એક બીજી આપેલી લીટી બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૪. એક બીજીને છેદનારી બે અમર્યાદ સીધી લીટીથી સરખે અંતરે હોય એવાં બિંદુઓનાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૫. જે ત્રિકોણો આપેલા પાયા પર અને તેની એકજ બાજુએ હોય તથા એક આપેલી સીધી લીટી જેટલી ઉંચાઈના હોય, તેમનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૬. આપેલી અમર્યાદ લીટીની બહારના એક આપેલા બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી જે અનેક લીટીઓ દોરી શકાય તે સઘળીનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૭. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર હોય, અને પાયાના એકજ છેડા આગળના જેના ખુણાઓ એક આપેલા ખુણા બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ? એવાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૮. બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થનાર વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૯. એક આપેલા વર્તુળના પરિઘથી આપેલે અંતરે આવેલાં બિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૦. આપેલા બિંદુથી એક આપેલે અંતરે હોય અને આપેલી સીધી લીટીથી બીજે આપેલે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૧૧. એક આપેલા વર્તુળની આપેલી જ્યાં સમાંતર દોરેલી જ્યાંઓના મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૨. એક આપેલી લીટીને સ્પર્શ કરનારાં આપેલી ત્રિજ્યા-વાળાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૩. બે આપેલી સમાંતર સીધી લીટીઓને સ્પર્શ કરનારાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪. એક બીજીને છેદનારી બે સીધી લીટીઓને સ્પર્શ કરતાં હોય એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

૧૫. ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૬. કોઈ પણ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનાર લીટીઓ એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણની બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૭. ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી અને તે ખુણો કરનારી બાજુઓને સામે આવેલા પાયાની પેલી બાજુએ લંબાવવાથી થતા બહારના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુ ત્રિકોણની બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૮. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર હોય અને જેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણાઓ એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન કયું ?

૧૯. એક આપેલી લીટીને આપેલા બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૦. જે વર્તુળો એક આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે અને જેમની ત્રિજ્યા એક આપેલી લીટી પરોળર હોય એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૧. એક આપેલા વર્તુળને આપેલા બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૨. જે સરખાં વર્તુળો એક બીજાને બહારથી સ્પર્શ કરે છે; તેમને સ્પર્શ કરનારાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૨૩. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે જે આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય.

૨૪. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે જે બીજી આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય.

૨૫. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય.

૨૬. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે જે એક આપેલી બીજી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય.

૨૭. એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને જે બીજાં આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૨૮. એક આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય અને આપેલાં જે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૨૯. જે સમાંતર સીધી લીટીઓ વચ્ચે આપેલા એક બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને તે સમાંતર લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૦. એક આપેલા બિંદુથી આપેલે અંતરે હોય અને જે આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૧. એક આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય અને બે બીજી આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૨. એક આપેલા બિંદુથી અને એક આપેલી લીટીથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૩. બે આપેલાં બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય અને બે આપેલી લીટીઓથી પણ સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૪. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓથી સરખે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૫. બે આપેલી લીટીઓથી આપેલે અંતરે હોય એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો.

૩૬. અબક ત્રિકોણનો અ ખુણો કાટખુણો છે. અકમાં એક એવું કે બિંદુ શોધી કાઢો કે બકથી તેનું અંતર અડ બરોબર હોય.

૩૭. જેની લંબાઈ નિત્ય છે એવી એક લીટી એક કાટ-ખુણાના ભુજો વચ્ચે (અથવા ભુજો ઉપર) ગમગા કરે છે; તો તેના મધ્યબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૩૮. જે બિંદુઓમાંથી આપેલી બે અમર્યાદ લીટીઓ પર દોરેલા બે લંબોનો તફાવત આપેલી એક ત્રીજી લીટીની બરોબર હોય એવાં સઘળાં બિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો. એવાં નિધાન કેટલાં હોઈ શકે ?

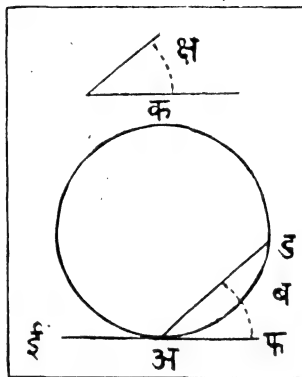
૩૯. જે ત્રિકોણો આપેલા એકજ પાયા પર અને તેની એકજ બાજુએ હોય, અને જે દરેકની બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો પાયા પરના ચોરસ બરોબર હોય, એવા ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

પ્રકરણ ૩.

(કૃત્યો.)

કૃત્ય ૨૦.

એક આપેલા વર્તુળમાંથી એક એવો વર્તુળખંડ કાપી કાઢો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય.



અબક આપેલું વર્તુળ છે. ક્ષ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા વર્તુળને અ બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે એવી ઈઅફ લીટી દોરો. ઈઅફ લીટીના અ બિંદુ આગળ ક્ષ ખુણા બરાબરનો ફઅડ ખુણો કરો. ધારો કે અડ લીટી પરિધને ઢમાં છેદે છે. (ધારો કે ફઅડ ખુણાની પેલી બાજુ પરના પરિધ પર એક ક બિંદુ છે).

અકડ એ જોઈતો વર્તુળખંડ છે.

સિદ્ધતા—∵ ઈઅફ સ્પર્શલીટી છે, અને અડ બધા અ સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી છે.

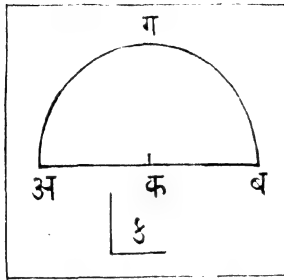
∴ ∠ફઅડ = વ્યુત્ક્રમ ખંડમાંનો ∠અકડ (પ્ર૦ ૪૯).

∴ ∠ફઅડ = ∠ક્ષ,

∴ અકડ વર્તુળખંડમાંનો ખુણો = ∠ક્ષ.

કૃત્ય ૨૧.

એક આપેલી લીટી જેની જ્યાં થાય અને જે-
માંનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરાબર થાય
એવો એક વર્તુળખંડ દોરો.

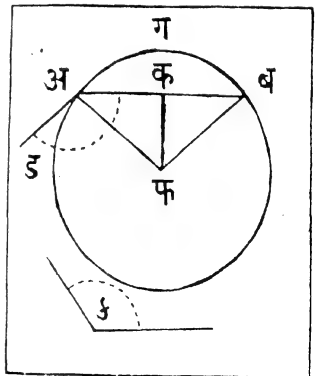
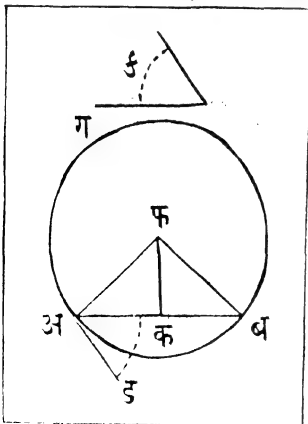


\angle ક એ આપેલો ખુણો છે. અથવા આપેલી લીટી છે.

રચના—જો \angle ક કાટખુણો હોય, તો અથવા કમાં
દુભાગો. (આકૃતિ ૧ જુઓ). કને મધ્યબિંદુ લઈ કઅ
ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. અગત્ય અર્ધવર્તુળ એ જોઈતો
વર્તુળખંડ છે.

\therefore અગત્ય એ અર્ધવર્તુળ છે,

\therefore તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો કાટખુણા બરાબર છે. (પૃ ૪૦)



પણ જો આપેલો \angle ક કાટખુણા કરતાં મોટો અથવા નાનો હોય, તો અ બિંદુ આગળ \angle ક જેવડો (જે બાજુએ વર્તુળખંડ દોરવાનો છે તેથી ઉલટી બાજુએ) \angle બઅડ કરો. હાલ લીટી સાથે કાટખુણો કરે એ પ્રમાણે અફ લીટી દોરો. અબને દુભાગનાર કફ લંબ દોરો. ફબ સાંધો. (આકૃતિ ૨ તથા ૩ જુઓ).

∴ અકફ અને બકફ ત્રિકોણોમાં—

અક=કબ; (રચના)

કફ અને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય;

\angle અકફ= \angle બકફ; (રચના)

∴ અફ=બફ. (પ્ર૦ ૧૦)

માટે ફને મધ્યબિંદુ લઈ ફઅ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ બ બિંદુમાં થઈને જશે. આવું વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળનો અગવ વર્તુળખંડ માગેલો વર્તુળખંડ છે.

સિદ્ધતા—∴ અડ લીટી અફ ત્રિજ્યા સાથે કાટખુણો કરે છે;

∴ અડ એ સ્પર્શલીટી છે. (કૃ. ૧૭)

∴ \angle બઅડ=વ્યુત્ક્રમ વર્તુળખંડમાંનો \angle અગવ. (પ્ર૦ ૪૯)

∴ \angle બઅડ એ આપેલા ખુણા બરોબર છે; માટે આપેલા ખુણા જેવડો જેમાંનો ખુણો છે, અને આપેલી લીટી જેની જ્યા છે, એવો વર્તુળખંડ દોરાયો.

૨૧મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. એક આપેલી લીટી પર એક એવો વર્તુળખંડ દોરો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા પહોળા ખુણાની બરોબર હોય.

૨. એક આપેલી લીટી પર એક એવો વર્તુળખંડ દોરો કે જેમાંનો ખુણો એક આપેલા સાંકડા ખુણાની બરોબર હોય.

૩. એક આપેલી લીટી પર એક એવો ક્રૌંસ દોરો કે

જેના પરનો પરિધકોણ એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય.

૪. એક આપેલી લીટી પર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે જેનો શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય. એવા કેટલા ત્રિકોણ નીકળી શકશે ?

૫. આપેલા પાયા પર એક એવો સમઘ્રિખાણુ ત્રિકોણ દોરો કે જેનો શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો એક આપેલા ખુણા બરાબર હોય.

૬. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણો દોરો—

(૧) પાથો, એક બાજુ, અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો.

(૨) પાથો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને શિરો-
બિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને જે
બિંદુમાં છેદતો હોય તે બિંદુ.

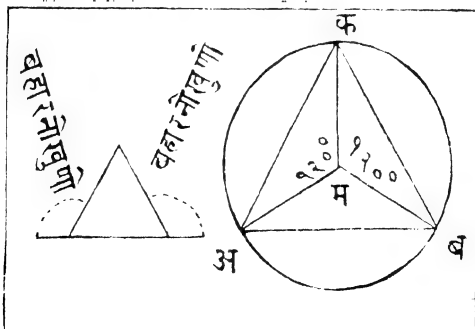
(૩) પાથો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને ઉચ્ચાઈ.

(૪) પાથો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને ક્ષેત્રફળ.

(૫) પાથો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને શિરો-
બિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા.

કૃત્ય ૨૨.

આપેલા વર્તુળમાં એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.



અવક આપેલું વર્તુળ છે.

રચના—એક ગમે તેવો સમબાજી ત્રિકોણ દોરો. તેની એક બાજી લંબાવીને બહારના ખુણાઓ કરો. આપેલા વર્તુળનું મ મધ્યબિંદુ શોધી કાઢો. મ આગળ લગોલગ બે ખુણાઓ એવા કરો કે જે સમબાજી ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓ બરોબર હોય. આ ખુણાઓના લુગ પરિધને અ, બ, કમાં મળે છે એમ સમજો. અબ, બક, કઅ સાંધો.

અવક જોઈ તો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—સમબાજી ત્રિકોણનો દરેક ખુણો 60° હોય છે, માટે બહારનો દરેક ખુણો 120° છે.

વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ એકંદર ૪ કાટખુણા હોય છે. તેમાંથી મ આગળના બે ખુણાઓમાંનો દરેક 120° છે; માટે બાકીનો ખુણો અમબ 120° છે.

$\therefore \angle \text{અમબ} = \angle \text{બમક} = \angle \text{કમઅ}.$

\therefore કૌંસો અબ, બક, કઅ સધળા સરખા છે. (પ્ર૦ ૩૩)

\therefore અબ, બક, કઅ બ્યાઓ પરસ્પર સરખી છે. (પ્ર૦ ૩૪)

\therefore અવક સમબાજી છે.

૨૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

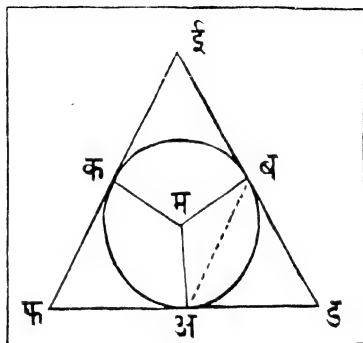
૧. એક આપેલા વર્તુળમાં એક આપેલા ત્રિકોણને સમકોણ ત્રિકોણ દોરો.

૨. ૩" જેટલી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળમાં એક આપેલા પહોળાખુણ ત્રિકોણને સમકોણ હોય એવો ત્રિકોણ દોરો.

૩. ૧.૪" જેટલી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળમાં એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે જેની બાજુઓ એક આપેલા ત્રિકોણની બાજુઓને સમાંતર હોય.

કૃત્ય ૨૩.

એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ સમબાજી ત્રિકોણ દોરવો.



રચના—આગલા કૃત્યમાં બતાવ્યા પ્રમાણે મ મધ્ય-બિંદુમાંથી એવી લીટીઓ દોરો કે લગોત્તમ આવેલા ખુણા-માનો દરેક ૧૨૦° થાય, અને તે લીટીઓને પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તે લીટીઓ અ,બ,કમાં પરિધને મળે છે.

અ,બ,ક આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીઓ દોરો.

$\therefore \angle અ$ અને $\angle બ$ દરેક કાટખુણો છે; (પ્ર૦ ૩૬) માટે $\angle બઅડ + \angle અબડ$ એ બે કાટખુણા કરતાં નાના છે. માટે આ સ્પર્શલીટીઓને લંબાવવામાં આવે તો તેઓ એક બીજાને મળશે. આ પ્રમાણે ત્રણે સ્પર્શલીટીઓને લંબાવવાથી તેઓ મળશે. ધારો કે તેઓ ડ,ઈ,ફ બિંદુઓમાં મળે છે.

ડઈફ બોધ્યો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—અડબમ ચતુષ્કોણ છે;

\therefore તેના અંદરના ખુણાઓ $= ૪$ કાટખુણા.

આમાંના $\angle મઅડ + \angle મબડ = ૨$ કાટખુણા;

અને $\angle અમબ = ૧૨૦^\circ$;

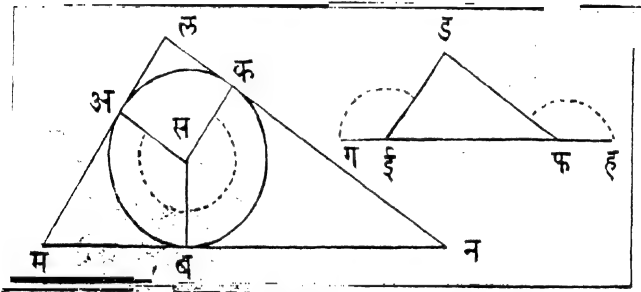
\therefore બાકીનો $\angle અડબ = \angle અમબનો ન્યૂનતાપૂરક$;
 $= ૬૦^\circ$.

એજ પ્રમાણે $\angle ડઈફ$ અને $\angle ફઈડ$ એ દરેક ૬૦° છે
 એમ સિદ્ધ થઈ શકશે.

$\therefore \angle અડબ, અર્થાત \angle ફડઈ = \angle ડઈફ = \angle ફઈડ = ૬૦^\circ$.

\therefore ડઈફ એ સમબાણુ ત્રિકોણ છે.

૨૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.



૧. ઉપલી આકૃતિમાં ડઈફ એક ગમે તેવો ત્રિકોણ છે,
 અને તેનો સમકોણ એક લમન ત્રિકોણ વર્તુળની આસ-
 પાસ દોરેલો છે. સાબીત કરો કે (૧) સબ ત્રિજ્યા સાથે
 સ બિંદુ આગળ ડઈગ, ડફહ ખુણા બરોબરના ખુણા
 કરનારી સઅ, સક લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં નથી;
 (૨) તેમની વચ્ચેનો બહિર્વક ખુણો સબ બાણુ તરફ આવશે;
 (૩) ડઈફ ત્રિકોણની ડ બિંદુમાં મળનારી બાણુઓમાંની
 એકને લંબાવવાથી થતો બહારનો ખુણો અસક ખુણાની
 બરોબર થશે; અને (૪) અ,ક બિંદુઓ આગળ દોરેલી
 સ્પર્શલીટીઓ અસક એ અંતર્વક ખુણાની બાણુ તરફ
 લંબાવવાથી મળશે.

૨. એમ સાબીત કરો કે કોઈ વર્તુળમાં દોરેલા સમ-
બાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ આગળ તે વર્તુળને સ્પર્શ કર-
નારી લીટીઓ દોરવામાં આવે તો તેઓ એક બીજાને મળશે,
અને તે વર્તુળની આસપાસ દોરાએલો સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવશે.

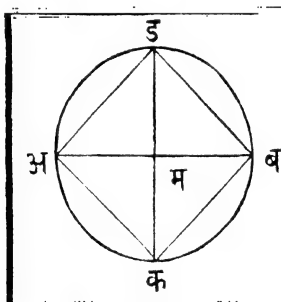
૩. એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ એક આપેલા ત્રિ-
કોણને સમકોણ હોય એવો ત્રિકોણ દોરો.

૪. વર્તુળની આસપાસ દોરેલો સમબાજુ ત્રિકોણ તે વર્તુળ-
ની અંદર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણથી ચારગણો છે.

૫. વર્તુળની અંદર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણની કોઈ પણ
બાજુ તે વર્તુળની આસપાસ દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણની
બાજુના અર્ધ બરોબર હોય છે.

કૃત્ય ૨૪.

આપેલા વર્તુળમાં ચોરસ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ મમાં થઈને જાય
એવો એક અમલ વ્યાસ દોરો. અમલ સાથે કાટખુણો કરનારો
બીજો કમલ વ્યાસ મમાં થઈને જાય એવો દોરો. અ, ડ,
બ, ક સાંધો.

અલબત્ત જોઈતો ચોરસ છે.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle અમડ = \angle ડમબ = \angle બમક =$
 $\angle કમઅ;$ (રચના અને પ્ર૦ ૩)

∴ કૌંસ અડ=કૌંસ ઢવ=કૌંસ વક=કૌંસ કઅ; (પૃ ૩૩)

∴ અડ=ઢવ=વક=કઅ. (પૃ ૩૪)

∴ કઅડ એ અર્ધવર્તુળ છે;

∴ ∠કઅડ કાટખુણો છે. (પૃ ૪૦)

એવીજ રીતે ∠અડવ, ∠ઢવક, ∠વકઅ એ દરેક કાટખુણો છે;

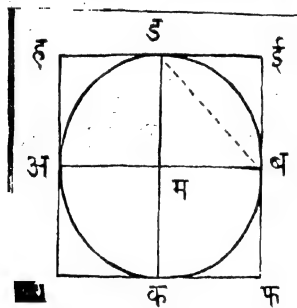
∴ અડવક એ ચોરસ છે.

૨૪મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. વર્તુળમાં દોરેલો ચોરસ તે વર્તુળની ત્રિજ્યા પરના ચોરસથી બમણો અને વ્યાસ ઉપરના ચોરસથી અર્ધો હોય છે.

કૃત્ય ૨૫.

એક આપેલા વર્તુળની આસપાસ ચોરસ દોરવો.



રચના—મ મધ્યબિંદુમાં યદ્યપિ જતો અમલ વ્યાસ દોરો. અલ સાથે કાટખુણો કરે એવો કમડ બીજો વ્યાસ દોરો. અ, વ, ક, ઢ બિંદુઓ આગળ વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીઓ દોરો. ઢવ સાધો.

∴ ∠ઈઢવ એક કાટખુણો કરતાં નાનો છે, અને

∠ઈવઢ એક કાટખુણો કરતાં નાનો છે;

∴ \angle ઈઢવ + \angle ઈઘઢ એ કાટખુણા કરતાં નાના.

માટે ઢઈ અને ઘઈ લંબાવવાથી મળશે.

એજ કારણથી બીજી સ્પર્શલીટીઓ પણ લંબાવવાથી મળશે.

ધારો કે તેઓ ઈ,ફ,ગ,હ બિંદુઓમાં મળે છે.

ઈફગહ એ બેઠતો ચોરસ છે.

સિદ્ધતા—∴ \angle ડમઘ=૧ કાટખુણો, (રચના)

અને \angle મઢઈ=૧ કાટખુણો, (પ્ર૦ ૩૬)

∴ \angle ડમઘ + મઢઈ=૨ કાટખુણા;

∴ હઢઈ ॥ અઘ. (પ્ર૦ ૫)

એજ કારણથી ગકફ ॥ અઘ;

∴ હઈ ॥ ગફ. (પ્ર૦ ૭)

તેજ પ્રમાણે હઅગ ॥ ડમક ॥ ઈઘફ;

∴ હઈફગ એ સમાંતરચાળુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ હઅઘઈ એ સમાંતરચાળુ ચતુષ્કોણ છે;

∴ હઈ=અઘ. (પ્ર૦ ૨૨)

એજ પ્રમાણે કઢ = ઈફ.

પરંતુ ∴ અઘ = કઢ; (રચના)

∴ હઈ = ઈફ;

∴ હઈ = ઈફ = ફગ = ગહ. (પ્ર૦ ૨૨)

∴ ઢક ॥ ઈફ,

અને \angle મઢઈ = ૧ કાટખુણો; (પ્ર૦ ૩૬)

∴ \angle ઈ = ૧ કાટખુણો. (પ્ર૦ ૬)

એજ કારણથી ફ, ગ, હ આગળના ખુણાઓ પણ કાટખુણા છે.

∴ ઈફગહ એ ચોરસ છે.

૨૫મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

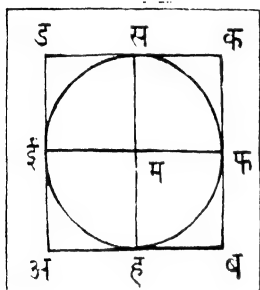
૧. વર્તુળની આસપાસ દોરેલો ચોરસ તે વર્તુળની અંદર

દોરેલા ચોરસથી બમણો અને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા પર દોરેલા ચોરસથી ચારગણો હોય છે.

૨. કોઈ વર્તુળના ગમે તે બે વ્યાસોના છેડા આગળ દોરેલી સ્પર્શલીટીઓથી થતા ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને તેથી કરીને તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

કૃત્ય ૨૬.

આપેલા ચોરસમાં વર્તુળ દોરવું.



અવકાશ આપેલો ચોરસ છે.

રચના—અવ, અડને હ તથા ઈ બિંદુમાં અનુક્રમે દુભાગો. હ બિંદુમાંથી અડને સમાંતર હસ લીટી દોરો. ઈમાંથી અવને સમાંતર ઈફ લીટી દોરો. ધારો કે હસ અને ઈફ લીટીઓ ડક અને કવને અનુક્રમે સ

અને ફ બિંદુમાં મળે છે, અને એક બીજાને મમાં છેદે છે.

મ એ માગેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

સિદ્ધતા— \therefore અવ = અડ,

(પક્ષ)

અને અહ = ઈઅવ; અને

અઈ = ઈઅડ;

\therefore અહ = અઈ.

\therefore અડ ॥ હસ ॥ વક, અને અવ ॥ ઈફ ॥ ડક;
(રચના)

\therefore ઉપલી આકૃતિમાંના સઘળા ચતુષ્કોણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે.

\therefore અઈમહ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

અહ = અઈ;

\therefore ઈમ = મહ.

(૫૦ ૨૨)

એવીજ રીતે સિદ્ધ કરી શકાશે કે મહ=મફ, મફ=મસ, મસ=મઈ.

માટે મને મધ્યબિંદુ લઈ મઈ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ ઈ,હ,ફ,સ બિંદુઓમાં થઈને જશે.

હવે $\therefore \angle અ = કાટખુણો,$

$\therefore \angle અઈમ = કાટખુણો.$ (પ્ર૦ ૬)

એવીજ રીતે $\angle સ, \angle ફ, \angle હ$ એ કાટખુણા છે; માટે અહ, હફ, ફસ, સઅ એ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીઓ થશે.

૨૬મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

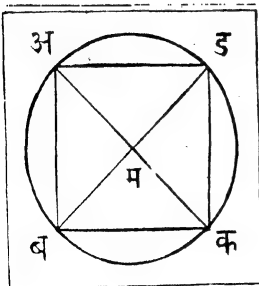
૧. આપેલા સમખાળુ ચતુષ્કોણમાં એક વર્તુળ દોરો, અને સિદ્ધ કરો કે તે સમખાળુ ચતુષ્કોણના કર્ણોનું છેદન-બિંદુ આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

૨. કોઈ પણ ચોરસના બે પાસપાસેના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓના છેદનબિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને તે છેદનબિંદુમાંથી એક બાળુ પર દોરેલા લંબ જોડલી ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ તે ચોરસની અંદર દોરેલું વર્તુળજ છે એમ સાબીત કરો.

૩. લંબચોરસમાં વર્તુળ દોરી શકાશે કે ?

કૃત્ય ૨૭.

આપેલા ચોરસની આસપાસ વર્તુળ દોરવું.



અવકહ આપેલો ચોરસ છે.

૨ચના—અક,વહ સાંધો. ધારો કે અક, વહ લીટીઓ મ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે.

સિદ્ધતા— \therefore અહવ ત્રિકોણમાં, અહ=અવ;

∴ $\angle અવઢ = \angle અઢવ.$ (પ્ર૦ ૧૨)

પરંતુ અવઢ ત્રિકોણનો \angle અ કાટખુણો છે,

∴ $\angle અઢવ$ એટલે $\angle અઢમ = \frac{1}{2}$ કાટખુણો.

એવીજ રીતે $\angle ઢઅમ = \frac{1}{2}$ કાટખુણો,

∴ $\angle અઢમ = \angle ઢઅમ,$

∴ અમ = મઢ. (પ્ર૦ ૧૩)

એજ કારણથી મઢ = મક = મવ.

માટે મને મધ્યખિંદુ લઈને મઅ ત્રિજ્યાએ દોરેલું વર્તુળ અ,વ,ક,ઢ ખિંદુઓમાં થઈને જશે.

૨૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

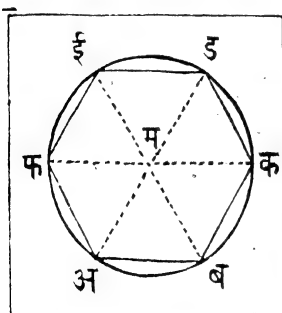
૧. એક આપેલા લંબચોરસની આસપાસ વર્તુળ દોરો.

૨. સિદ્ધ કરી આપો કે ચોરસની અંદર અને તેજ ચોરસની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનું મધ્યખિંદુ એકજ છે.

૩. ચોરસની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા પરનો ચોરસ, તે ચોરસની અંદર દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા પરના ચોરસથી કેટલાગણો હોય?

કૃત્ય ૨૮.

આપેલા વર્તુળમાં એક નિયમિત પટકોણ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળનું મધ્યખિંદુ મ લો. એક અમઢ વ્યાસ દોરો. અમ, મઢ ત્રિજ્યાઓ પર સમખાણુ ત્રિકોણો દોરો. આ ત્રિકોણોની મ ખિંદુમાં મળનારી બાણુઓને બંને તરફ પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારે.

કે તેઓ પરિધને વ,ક,ઈ,ફ ખિંદુઓમાં મળે છે. અવકઢઈફ સધી.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle અમબ = ૬૦^\circ$, (૨૨૫ના)

તેમજ $\angle હમક = ૬૦^\circ$, (,,)

$\therefore \angle કમવ = ૬૦^\circ$; (૫૦ ૧)

\therefore સામેના ખુણાઓ $\angle હમઈ$, $\angle ઈમફ$, $\angle ફમઅ$
પૈકી દરેક ખુણો $= ૬૦^\circ$. (૫૦ ૩)

$\therefore \angle અમવ = \angle વમક = \angle કમહ = \angle હમઈ = \angle ઈમફ$
 $= \angle ફમઅ$;

\therefore કૌંસ અવ $=$ કૌંસ વક $=$ કહ $=$ હઈ $=$ ઈફ $=$ ફઅ; (૫૦ ૩૩)

\therefore જ્યાં અવ $=$ જ્યાં વક $=$ કહ $=$ હઈ $=$ ઈફ $=$ ફઅ (૫૦ ૩૪)

\therefore અવકહઈફ આકૃતિ સમબાળુ છે.

$\therefore \angle અમવ = ૬૦^\circ$, (૨૨૫ના)

અને $\angle મઅવ = \angle મવઅ$, (૫૦ ૧૨)

$\therefore \angle મઅવ = ૬૦^\circ$.

એવીજ રીતે સાબીત થઈ શકશે કે અ,વ,ક,હ,ઈ,ફ એ
બિંદુઓ આગળના બે અંદરના ખુણાઓમાંના દરેક ૬૦° છે.

માટે $\angle ફઅવ = ૧૨૦^\circ = \angle અવક = \angle વકહ = \angle કહઈ$
 $= \angle હઈફ = \angle ઈફઅ$.

\therefore અવકહઈફ આકૃતિ સમકોણુ પણ છે.

૨૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્નો.

૧. આપેલી અવ લીટી પર એક નિયમિત પટકોણુ દોરો.

૨. ૨૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં અ,ક,ઈ સાંધો અને સિદ્ધ કરો કે અકઈ સમબાળુ ત્રિકોણુ છે.

૩. વર્તુળમાં દોરેલા પટકોણુની દરેક બાળુ ત્રિજ્યા બરાબર છે, અને પટકોણુનું ક્ષેત્રફળ વર્તુળની ત્રિજ્યા પર દોરેલા સમબાળુ ત્રિકોણુથી છગણું હોય છે.

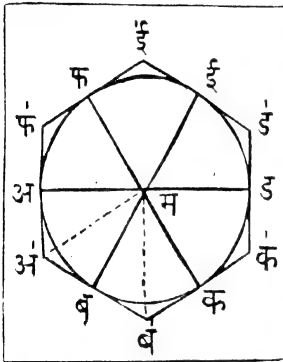
૪. ૨૮મા કૃત્યની આકૃતિમાં વફ, અક, અઈ સાંધો, અને સિદ્ધ કરો કે અક અને અઈ લીટીઓ વફના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે.

૫. વર્તુળમાં દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણની પરિમિતિ વ્યાસથી કેટલાગણી હોય છે ?

૬. વર્તુળમાં દોરેલો નિયમિત ષટ્કોણ તેજ વર્તુળમાં દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણ કરતાં બમણો હોય છે.

કૃત્ય ૨૯.

આપેલા વર્તુળની આસપાસ નિયમિત ષટ્કોણ દોરવો.



રચના—આપેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ મમાં થઈ જતો એક અમઢ વ્યાસ દોરો. અમ, મઢ પર સમબાજુ ત્રિકોણો દોરો. મ બિંદુમાં મળનારી આ ત્રિકોણોની બાજુઓને બંને તરફ પરિધને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તેઓ પરિધને વ, ક,

ઈ, ફ બિંદુઓમાં મળે છે.

$\therefore \angle અમઢ અને \angle કમઢ દરેક ૬૦^\circ$ છે; (રચના)

$\therefore \angle વમક = ૬૦^\circ$. (પ્ર૦ ૧)

એવીજ રીતે સામેના ખુણાઓ $\angle અમફ = \angle ફમઈ = \angle ઈમઢ = ૬૦^\circ$. (પ્ર૦ ૩)

મઅ, મવ, મક, મઢ, મઈ, મફ ત્રિજ્યાઓના છેડાનાં બિંદુ આગળ સ્પર્શલીટીઓ દોરો. એ લીટીઓ લંબાવવાથી મળશે. ધારો કે તેઓ અ, વ, ક, ડ, ઈ, ફ, બિંદુઓમાં મળે છે.

અવકઢઈફ જોઈતો ષટ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—અર્ધચંદ્ર ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં બે ખુણા-
ઓ કાટખુણા છે અને ત્રીજો ખુણો અમલ=૬૦° છે;
માટે બાકીનો \angle અર્ધચંદ્ર=૧૨૦°.

એજ કારણથી \angle વર્ચક = \angle કર્ચક = \angle ડર્ચક = \angle ર્ચક =
= \angle ફર્ચક = ૧૨૦°.

∴ અંમ એ \angle અમલને દુભાગે છે; (પ્ર૦ ૩૭)

∴ અંમઅ = ૩૦°.

એજ કારણથી \angle અંમલ = \angle લંમલ = \angle લંમક =
 \angle કંમક = \angle કંમલ = \angle ડંમલ = \angle ડંમર = \angle ર્મર =
 \angle ર્મલ = \angle ફંમલ = \angle ફંમઅ = ૩૦°.

∴ \angle અંમલ = \angle લંમક = \angle કંમલ = \angle ડંમર = \angle ર્મલ
= \angle ફંમઅ = ૬૦°.

∴ અંમ એ \angle અર્ધચંદ્રને દુભાગે છે; (પ્ર૦ ૩૭)

∴ \angle મર્ધચંદ્ર = ૬૦°.

એજ કારણથી \angle અર્ધચંદ્ર = ૬૦°;

અને અંમલ = ૬૦°. (ઉપર સિદ્ધ થયું છે.)

∴ અંમલ \triangle સમબાળ છે.

એવીજ રીતે લંમક, કંમલ, ડંમર, ર્મલ, ફંમઅ
ત્રિકોણો પણ સમબાળ છે એમ સિદ્ધ થઈ શકશે.

∴ અર્ધચંદ્ર = વર્ચક = કર્ચક = ડર્ચક = ર્ચક = ફર્ચક.

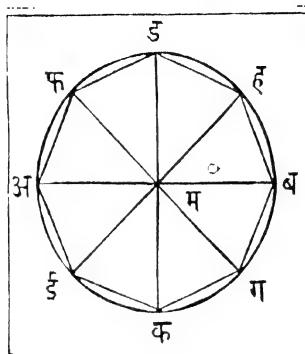
∴ અર્ધચંદ્ર ર્ચક સમબાળ છે.

અને ∴ \angle અર્ધચંદ્ર, \angle વર્ચક...એ દરેક ૧૨૦° છે;

∴ અર્ધચંદ્ર ર્ચક સમકોણ છે.

કૃત્ય ૩૦.

આપેલા વર્તુળમાં નિયમિત અષ્ટકોણ દારવો.



રચના—મ મધ્યબિંદુમાં થઈ જતો અમલ વ્યાસ દોરો. તેની સાથે કાટખુણો કરે એવો બીજો કમલ વ્યાસ દોરો. વળી અમલ અને અમલ ખુણાઓને દુભાગનાર રૂંદ અને ફગ વ્યાસો દોરો. અફ, ફડ, ડહ, હવ, વગ, ગક, કઈ, અને રૂંઅ સાંધો.

અરૂંકગવહડફ એ માગેલો અષ્ટકોણ છે.

સિદ્ધતા— $\therefore \angle અમરૂં = \frac{1}{2} કાટખુણો = \angle રૂંમક = \angle કમગ...$ (રચના)

$\therefore અરૂં = રૂંક = કગ = ગવ = વહ = હડ = ડફ = ફઅ.$

(પ્ર૦ ૩૩ તથા ૩૪)

$\therefore અરૂંકગવહડફ એ સમબાળુ છે.$

હવે $\therefore \angle અમરૂં = \frac{1}{2} કાટખુણો,$ (રચના)

$\therefore \angle મઅરૂં + \angle મરૂંઅ = \frac{3}{2} કાટખુણો.$ (પ્ર૦ ૮)

અને $\therefore \angle મઅરૂં = \angle મરૂંઅ,$ (પ્ર૦ ૧૨)

$\therefore \angle મઅરૂં = \frac{3}{4} કાટખુણો.$

એજ પ્રમાણે અ,ઈ,ક,ગ,બ,હ,ઢ,ફ એ બિંદુઓ આગળના બે અંદરના ખુણાઓમાંનો દરેક = $\frac{3}{8}$ કાટખુણો.

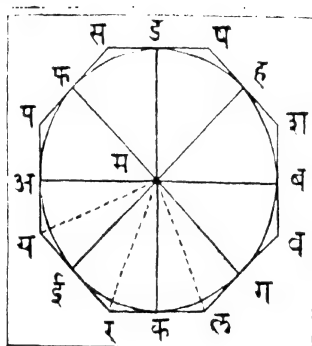
$$\therefore \angle \text{ફઅઈ} = \frac{3}{8} \times 2 = 1\frac{1}{4} \text{ કાટખુણો.}$$

એજ પ્રમાણે \angle ઈ, \angle ક, \angle ગ, \angle બ, \angle હ, \angle ઢ, \angle ફ એ દરેક = $1\frac{1}{4}$ કાટખુણો.

\therefore અઈકગબહઢફ સમકોણ પણ છે.

કૃત્ય ૩૧.

આપેલા વર્તુળની વ્યાસપાસ નિયમિત અષ્ટકોણ દોરવો.



રચના—મ મધ્યબિંદુમાં થઈ જતો એક અમલ વ્યાસ દોરો. તેની સાથે કાટખુણો કરે એવો એક બીજો કમલ વ્યાસ દોરો. \angle અમક અને \angle અમઢને દુભાગનાર ઈંહ, ફગ વ્યાસ દોરો. અ, ઈ, ક, ગ, બ, હ, ઢ, ફ બિંદુઓ આગળ આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી લીટીઓ દોરો; અને તેમને ચ, ર, લ, વ, શ, ષ, સ, પ બિંદુઓમાં મળવા દો. મચ, મર, મલ, મવ, મશ, મષ, મસ, મપ સાંધો.

ચરલવશષસપ એ માગેલો અષ્ટકોણ છે.

સિદ્ધતા—

∴ અચરમ ચતુષ્કોણ છે, અને તેના \angle ચઅમ અને \angle ચરમ એ કાટખુણા છે; માટે \angle અચર એ \angle અમરનો ન્યૂનતાપૂરક છે.

એજ પ્રમાણે \angle રક એ \angle રમનો ન્યૂનતાપૂરક છે.

પરંતુ ∴ \angle અમર = \angle રમક = \angle કમગ =૪૦.

∴ \angle અચર = \angle રક = \angle કલગ =૪૦.

∴ ચરલવશષસપ એ આકૃતિ સમકોણ છે.

∴ ચમ, રમ, લમ.....એ ચ, ર, લ.....આગળના ખુણાઓને હુલાગે છે; (૫૦ ૩૭)

અને હમણાંજ સિદ્ધ કરી ગયા કે એ ખુણાઓ સરખા છે;

∴ \angle મચર = $\frac{1}{2}$ \angle અચર; \angle મરક = $\frac{1}{2}$ \angle રક...૪૦.

∴ \angle મચર = \angle મલર = \angle ચરમ = \angle લરમ.

હવે ∴ ચરમ અને મરલ ત્રિકોણોમાં—

$$\angle$$
ચરમ = \angle મરલ;

$$\angle$$
મચર = \angle મલર;

રમ બંનેમાં સામાન્ય;

∴ ચર = રલ.

(૫૦ ૧૧)

એજ પ્રમાણે સાબીત થશે કે રલ = લવ = વશ = શષ = વસ = સપ.

∴ ચરલવશષસપ એ આકૃતિ સમબાજુ પણ છે.

૨૬ થી ૩૧ કૃત્યો પરના પ્રશ્નો.

૧. આપેલી નિયમિત બહુકોણ આકૃતિમાં એક વર્તુળ દોરો.

૨. આપેલી નિયમિત બહુકોણ આકૃતિની આસપાસ એક વર્તુળ દોરો.

૩. ૧"ના પાયાવાળા એક નિયમિત પંચકોણની અંદર તથા તેની આસપાસ વર્તુળ દોરો.

૪. ૧.૪"ની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણોની પરિમિતિ શોધી કાઢો.

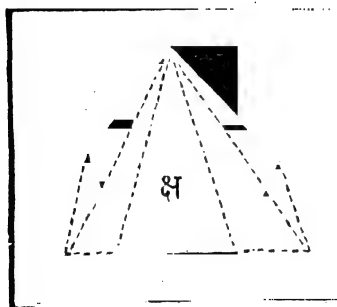
૫. આપેલા વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ નિયમિત દ્વાદશકોણ કાઢો.

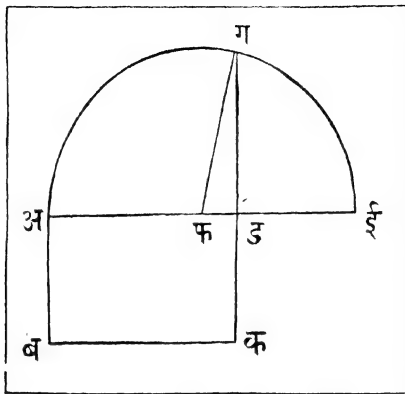
૬. વર્તુળની અંદર તથા તેની આસપાસ દોરેલા નિયમિત ષટ્કોણની તથા અષ્ટકોણની બાજુ સામે આવેલા વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળના ખુલાનું મહત્ત્વ કેટલું હોય ?

(નીચેનું કૃત્ય ટ્રેનિંગ કોલેજો માટે મુકરર કરેલા ભાગ-માં આવતું નથી).

કૃત્ય ૩૨.

એક આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિની બરોબરનો ચોરસ દોરવો.





ક્ષ એ આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિ છે.

રચના—જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય અને જે આપેલી સીધી લીટીઓવાળી આકૃતિની બરાબર હોય એવો એક અઘકડ સમાંતરચાળુ ચતુષ્કોણ હોય. (કૃત્ય ૧૫)

તેની અડ બાળુ લંબાવો, અને ડઈને ડક બરાબર રાખો. અઈને ફમાં દુભાગો. ફને મધ્યબિંદુ લઈને ફઈ ત્રિજ્યાએ એક અગઈ વર્તુળ દોરો. કડને અગઈ વર્તુળને મળતાં સુધી લંબાવો. ધારો કે તે વર્તુળને ગ બિંદુમાં મળે છે.

ડગ લીટી પરનો ચોરસ માગેલો ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા— \therefore ક્ષ = અડ · ડક;

અને \therefore ડક = ડઈ;

\therefore ક્ષ = અડ · ડઈ.

$$= (અફ + ફડ) (ફઈ - ફડ).$$

$$= (અફ + ફડ) (અફ - ફડ).$$

$$= અફ^2 - ફડ^2. \quad (પ્ર૦ ડ)$$

\therefore અફ = ફગ;

\therefore ક્ષ = ફગ^2 - ફડ^2.

$$=(\text{ફડ}^2 + \text{ડગ}^2) - \text{ફડ}^2 \\ = \text{ડગ}^2$$

$$\therefore \text{ક્ષ} = \text{ડગ}^2.$$

પરિશિષ્ટ અ (પહેલા પંડનું).

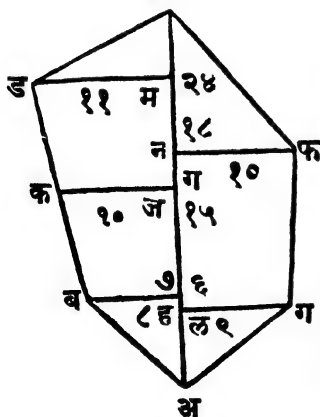
ગમે તેવી સીધી લીટીઓવાળા આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કાઢવું.

પહેલી રીત—આપેલી આકૃતિના એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓ સાથે સાંધો, એટલે તે આકૃતિના ભાગ પડી ત્રિકોણો બનશે. પછી તે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ કાઢો.

બીજી રીત—૧૫મા કૃત્ય પ્રમાણે આપેલી સીધી લીટીઓવાળા આકૃતિ બરાબરનો એક ત્રિકોણ હોય, અને પછી એ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કાઢો.

ત્રીજી રીત—આ રીતને મોજણી કરનારની રીત કહે છે. તે નીચે પ્રમાણે છે:—

૬૨૨



ધારો કે આપણે અબક-
ડઈફગ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ
કાઢવા માગીએ છીએ. આ
આકૃતિનો સૌથી મોટો કર્ણ
અઈદોરો. અને બ,ક,ડ,ફ,ગ
એ બિંદુઓમાંથી અઈ પર લંબો
દોરો. એ લંબોને હ,જ,મ,ન,લ
એ બિંદુઓમાં અઈને મળવા
દો. લંબોથી આપેલી આકૃતિના
ત્રે વિભાગો પડે છે તે ક્યાં તો

કાટખુણુ ત્રિકોણો છે કે સમલંબ ચતુષ્કોણો એટલે ટ્રાપી-
ઝિઅમ (કારણ કે બહાકજાડમ અને ફનાગલ)
છે. ટ્રાપીઝિઅમોનું ક્ષેત્રફળ અહ, અજ, અમ, અલ,

અન અને બહ, કજ, ડમ, ફન, ગલ એ અંતરોનાં માપ ઉપરથી નીકળી શકશે.

આ લંબાઈઓનાં માપ કાઢ્યા પછી તે નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવે છે:—

	ઈ સુધી	
	૨૯	
ડ ૧૧	૨૪	
	૧૮	૧૦ ફ
ક ૧૦	૧૫	
બ ૮	૭	
	૬	૯ ગ
	અથી ઉત્તરે	

નીચે આપેલી નોંધો પરથી આકૃતિઓ કાઢો અને તેનાં ક્ષેત્રફળ શોધી કાઢો.

(૧)

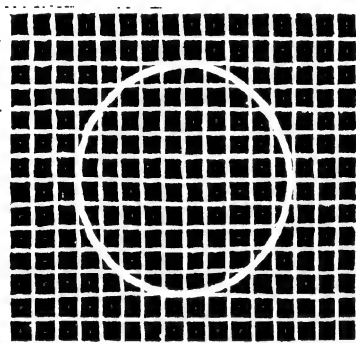
	ડ	
	૧૨૦	
ક ૫૦	૭૦	
	૫૦	૩૦ ઈ
બ ૪૦	૩૦	
	અ	

(૨)

	ઈ	
	૭૦	
ડ ૨૦	૬૦	
	૪૦	૧૫ ફ
ક ૩૦	૩૫	
બ ૨૦	૧૦	
	અ.	

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ.

ચોરસ દોરેલા કાગળ પરનાં પાંચ ધર અથવા ખાનાં જેટલી લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરો. તેમાં કેટલાં ચોરસ ખાનાં છે તે ગણી કાઢો. તે આસરે ૭૮ છે એમ માલમ પડશે. એજ પ્રમાણે ૧૦ અને ૧૫ ખાનાની લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાઓ લઈ વર્તુળો કાઢી પ્રયોગો કરી જુઓ.



ત્રિજ્યા ૫ હોય છે, ત્યારે ક્ષેત્રફળ ૭૮ હોય છે.

„ ૧૦ „ „ „ „ ૩૧૪ „ „

„ ... „ „ „ „ ... „ „ ૯૦

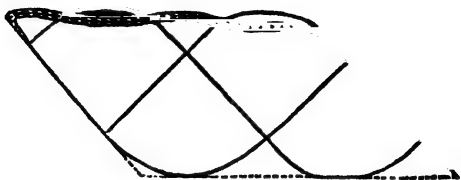
આ ઉપરથી વર્તુળના ક્ષેત્રફળ સંબંધી નીચેના નિયમ નીકળશે.

$$\text{વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ} = \text{ત્રિજ્યા}^2 \times \frac{22}{7}.$$

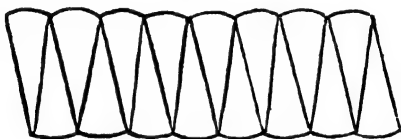
વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ કાઢવાની બીજી રીત—

વર્તુળમાં એક બીજ સાથે કાટખુણો કરે એવી એક પછી એક ત્રિજ્યા દોરો. આ ત્રિજ્યાઓથી વર્તુળના જે ભાગો પડે તે કાપી કાઢો, અને તેમને નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો. આ વર્તુળવિભાગોથી લગભગ કેવી આકૃતિ બને છે? “.....” આ આકૃતિની ઉપલી અને

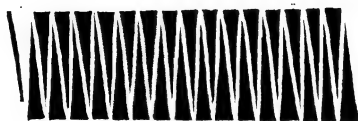
નીચલી બાજુઓ સીધી લીટીઓ નથી, કેમકે તે વર્તુળના કોસોની બનેલી છે.



હવે જો આપણે વર્તુળના વધારે ભાગો પાડીને એથી નાના વર્તુળવિભાગો બનાવીએ, તો તે વર્તુળવિભાગોને નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે સાથે સાથે ગોઠવવાથી થતી આકૃતિની ઉપલી તથા નીચલી બાજુઓ લગભગ સીધી લીટી જેવીજ થાય છે કે નહિ? “હા”. ત્યારે ધારી લો કે વર્તુળના ધણા નાના ભાગો પાડી તેથી થએલા વર્તુળવિભાગોને નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવ્યા છે.



અ



બ

આ પ્રમાણે થએલી આકૃતિ ભૂમિતિની કઈ આકૃતિને મળતી આવે છે? “લંબચોરસને.” આ લંબચોરસની લંબાઈ કેટલી છે? આપેલા વર્તુળના પરિધના અર્ધ બરાબર.” તેની ઉંચાઈ કેટલી છે? “વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી.” લંબ-

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ લંબાઈ ને ઉંચાઈના ગુણાકાર બરાબર હોય છે. આપણી આકૃતિમાં લંબાઈ = $\frac{1}{2}$ પરિધ = $\frac{1}{2}$ (ત્રિજ્યા $\times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$) = ત્રિજ્યા $\times \frac{2}{\sqrt{3}}$; અને ઉંચાઈ = ત્રિજ્યા.

માટે એ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ (લંબાઈ \times ઉંચાઈ) = $\frac{2}{\sqrt{3}} \times$ ત્રિજ્યા \times ત્રિજ્યા = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}}$. આ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(ભાસ્કરાચાર્યે કરેલા ‘લીલાવતી’ નામના સંસ્કૃત ગ્રંથમાં આ રીત આપેલી છે.)

ત્રીજી રીત—ધારો કે થોડામાં થોડે અંતરે ત્રિજ્યાઓ કાઢીને વર્તુળના ભાગો પાડ્યા છે. જો આવા ભાગોની સંખ્યા ઘણીજ મોટી હોય, તો દરેક ભાગ લગભગ ત્રિકોણને મળતો આવશે. ધારો કે એવા ક્ષ ત્રિકોણો છે. અલબત્ત આ ક્ષ ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ તેજ વર્તુળનું પણ ક્ષેત્રફળ થશે.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = પાયો \times ઉંચાઈ $\times \frac{1}{2}$. ઉપર જણાવેલા ત્રિકોણોમાંના દરેકની ઉંચાઈ = ત્રિજ્યા છે, અને પાયો = $\frac{\text{પરિધ}}{\text{ક્ષ}}$

છે. પરંતુ પરિધ = ત્રિજ્યા $\times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$; માટે $\frac{\text{પરિધ}}{\text{ક્ષ}} = (\text{ત્રિજ્યા} \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}})$.

અર્થાત્, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા \times (ત્રિજ્યા $\times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}}$) $\times \frac{1}{2}$ = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}}$.

માટે ક્ષ ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\text{ક્ષ}} \times \text{ક્ષ}$ = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}}$.

\therefore વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિજ્યા² $\times \frac{2}{\sqrt{3}}$.

પરિશિષ્ટ વ.

પરચુરણ પ્રશ્નો.

(૧) જો અબકડઈ એ વર્તુળમાં દ્વારેલો નિયમિત પંચ-કોણ હોય, તો

(૧) અક,અડ એ અ ખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે,

(૨) અબ ॥ ફક,

(૩) અકડ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે, અને તેના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી બમણો છે.

(૪) જો બડ, કઈ એ ક્ષ બિંદુમાં મળતાં હોય, તો કડક્ષ ને કડઈ ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

(૫) અ આગળની સ્પર્શલીટી બંદીને સમાંતર છે.

(૨) ઉપલા પ્રશ્નમાં બડ અને કઈ વચ્ચેનો ખુણો કેવો છે ?

(૩) એક વર્તુળમાં અક કોંસ = બડ કોંસ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અડ એ કબને સમાંતર છે અથવા કબની બરોબર છે.

(૪) અઈબ અને કઈડ જ્યાંયો એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કોંસ અક + કોંસ બડ = કોંસ કબ + કોંસ ડઅ = $\frac{2}{3}$ પરિધ.

(૫) અબ કોંસ પર પ એ એક ચળ બિંદુ હોય, તો સાબીત કરો કે \angle અબને દુભાગનારી લીટી એક સ્થાયી બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

(૬) અ,બ,ક એ વર્તુળના પરિધ પરનાં ત્રણ બિંદુઓ છે. \angle અબકને દુભાગનારી લીટી પરિધને ડમાં મળે છે. ડઈ લીટી અબને સમાંતર દોરી છે અને પરિધને ફમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે ડઈ = બક.

(૭) જો એક ખીજને છેદતી બે જ્યાઓ, છેદનાબિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સાથે સરખા ખુણાઓ કરતી હોય, તો તે બંને બરોબર હોવી જોઈએ.

૮. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની અંદર તથા આસપાસ દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુઓ અને ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ એક સીધી લીટીમાં હોય છે.

૯. જો વર્તુળો એક ખીજને અ તથા બ બિંદુમાં છેદે છે; અને અ તથા બમાં થઈને બંને વર્તુળોને છેદનારી કબજ અને ફીચ એ સમાંતર લીટીઓ દોરવામાં આવી છે, તો બતાવી આપો કે $k^2 = df$.

૧૦. અબક એ વર્તુળની અંદર દોરેલો ત્રિકોણ છે. અ, બ, ક બિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર લંબો દોર્યા છે અને જરૂર પડે લંબાવવામાં આવ્યા છે. તેઓ પરિધને ડ, ફ, કમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે ફ, ક, ડ ફાંસો અ, બ, ક બિંદુઓમાં અનુક્રમે દુભાગાય છે.

૧૧. જો એક વર્તુળની અફ અને કફ જ્યાઓ એક ખીજને ફમાં છેદતી હોય, તો બતાવી આપો કે અક, બક ફાંસો સામેના મધ્યકોણોનો સરવાળો $= 2 \angle$ અફ.

૧૨. પદ લીટી અ, બ, ક બિંદુઓ સાથે સરખા ખુણા કરે છે. પઅદ, પબદ ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ ર બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કર લીટી પકદ ખુણાને દુભાગે છે.

૧૩. અબકડફગ એ નિયમિત સપ્તકોણની ડફ બાજુના છેડાનાં બિંદુઓ અ શિરોબિંદુ સાથે સાંધ્યાં છે; તો સાબીત કરો કે અડફ ત્રિકોણના પાયા આગળનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી ત્રણગણો છે.

૧૪. એક ત્રિકોણ આધ્યો છે, તેના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો નિયમિત

સમકોણ કેવી રીતે દોરશો તે બતાવો.

૧૫. એકી સંખ્યા **સ** જેટલી બાજુઓવાળી એક નિયમિત બહુકોણ આકૃતિની એક બાજુના છેડાનાં બિંદુઓ, સામેના ખુણાના શિરોબિંદુ સાથે સાંધવામાં આવ્યાં છે; તો સિદ્ધ કરો કે એ પ્રમાણે થએલા ત્રિકોણના પાયા પરનો દરેક ખુણો શિરોબિંદુ આગળના ખુણા કરતાં ($\frac{સ-૧}{૨}$) ગણો છે.

૧૬. **અ** શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, પાંચો **બ**ક, અને **અ** શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગનારી લીટી **અ**બક ત્રિકોણના પાયાને જે બિંદુમાં મળે છે તે **ક** બિંદુ (ની સ્થિતિ), એ આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૧૭. એકજ વર્તુળમાં શિરોબિંદુ આગળના ખુણાઓ સરખા હોય એવા પુષ્કળ ત્રિકોણો કાઢવામાં આવે, તો સાબીત કરો કે તેના પાયાઓ અમુક એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૧૮. વર્તુળના **બ**ક વ્યાસના છેડાનાં બિંદુઓમાંથી **બ**ઈ, **ક**ક એ સમાંતર જ્યાંઓ દોરી છે, અને તે પરિધને **ઈ** તથા **ફ**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ઈ**ફ વર્તુળના મધ્ય-બિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

૧૯. **મ** એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે. **અ**મ**બ** એક વ્યાસ છે, અને **અ**ક એક જ્યા છે. **અ**બ પર **મ**ડ લંબ દોરો, ને તેને **અ**કને અથવા લંબાવેલી **અ**કને **ક**માં મળવા દો. હવે સાબીત કરો કે **અ**મ**ક** ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલું વર્તુળ **મ**,**બ**,**ક**,**ક**માં થઈને પસાર થતા વર્તુળની બરાબર છે.

૨૦. **અ**,**બ** એક વર્તુળના કોંસના છેડાનાં બિંદુઓ છે, અને **ક** કોંસ પરનું એક બિંદુ છે. **અ**ક અથવા લંબાવેલી **અ**કમાં **પ** એક એવું બિંદુ લીધું છે કે **ક**પ=ક**બ** છે; તો સિદ્ધ કરો કે **ક**ની સ્થિતિ ગમે ત્યાં હોય તોપણ **પ** બિંદુ **અ**,**બ**માં થઈને પસાર થતા એક નિશ્ચિત વર્તુળ પરજ હોય છે.

૨૧. એક વર્તુળની મઝ ને મઝ ત્રિજ્યાઓ એક બીજીને કાટખુણે છે, અને અક્ષ,વચ બે સમાંતર જ્યાઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે વક્ષ તથા અચ એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે.

૨૨. બે વર્તુળો એક બીજીને અ,બમાં છેદે છે, અને અ-માંથી દોરેલી એક લીટી વર્તુળોને પ તથા દમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે પવદ ત્રિકોણના ખુણાઓ નિત્ય છે.

૨૩. અબક એક ત્રિકોણ છે, અને ઢ એ અકમાં એક બિંદુ છે. જો વઅડ ને વકડની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો સરખાં હોય, તો સિદ્ધ કરો કે અબક ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે.

૨૪. અબકડ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. વર્ડ લીટી અબ સાથે વઅડ ખુણા બરાબરનો અવર્ડ ખુણો કરે છે, અને લંબાવેલી ઢકને ઈ બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે વકડ ને વર્ડ ત્રિકોણોની આસપાસ દોરેલાં વર્તુળો સરખાં છે.

૨૫. જેની ત્રિજ્યાઓ આપેલી બે લીટી જેવડી અનુક્રમે હોય, અને જેની સામાન્ય જ્યા આપેલી લંબાઈની હોય, એવાં બે વર્તુળો દોરો.

૨૬. સાબીત કરો કે એક બીજીને છેદનારાં બે વર્તુળોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી એક બીજીને સમાંતર દોરેલી લીટીઓ, અથવા સામાન્ય જ્યા સાથે સરખા ખુણાઓ કરે એમ દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૨૭. એક બીજીને છેદનારાં બે વર્તુળોના ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી તે વર્તુળનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીને સમાંતર દોરેલી લીટી સર્વથી મોટી છે.

૨૮. વર્તુળ બહારના એક અ બિંદુમાંથી અબક ને અડર્ડ સીધી લીટીઓ વર્તુળને છેદે એમ દોરેલી છે; તો સિદ્ધ કરો કે વર્ડ અને ઢકનું છેદનબિંદુ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ નથી.

૨૯. વર્તુળના મધ્યબિંદુથી જેનું અંતર પોતાની લંબાઈનું અર્ધ હોય, એવી આપેલા વર્તુળમાં એક જ્યા દોરો.

૩૦. વર્તુળની અંદર આપેલા એક બિંદુમાં થઈને જનારી સૌથી નાની જ્યા દોરો.

૩૧. આપેલા બિંદુમાં થઈને પસાર થાય, અને આપેલા બિંદુ આગળ જેના બે સરખા ભાગ પડે, એવી એક જ્યા આપેલા વર્તુળમાં દોરો.

૩૨. એક અર્ધવર્તુળના કૌંસના ત્રણ સરખા ભાગ કરો. તેમજ ૯૦° ના કૌંસના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩૩. બે સમકેન્દ્ર વર્તુળો આપ્યાં છે. અબ એ એક વર્તુળનો ચળ વ્યાસ છે, અને પ એ બીજા વર્તુળના પરિધ પરનું ચળ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અપ^૨ તથા બપ^૨નો સરવાળો નિત્ય છે.

૩૪. અબક ને પદર એ એક વર્તુળમાં કાઢેલા બે ત્રિકોણો છે, અને તેમાં અ,પ,વ,દ,ક,ર બિંદુઓ અનુક્રમે એક પછી એક આવે છે; વળી અપ કૌંસ=વદ કૌંસ=કર કૌંસ છે; તો સિદ્ધ કરો કે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

૩૫. વર્તુળના પરિધ ઉપર આપેલાં બે બિંદુઓ પ ને દ માંથી બે સરખી અને સમાંતર જ્યાઓ દોરો.

૩૬. મ એ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને અ તે વર્તુળમાં એક ગમે તે બિંદુ છે; અમક એ વ્યાસ છે અને પ એ પરિધ પરનું ગમે તે એક બિંદુ છે; તો સાબીત કરો કે અક એ અપના કરતાં નાની છે, અને અપ એ અબના કરતાં નાની છે.

૩૭. બ એક વર્તુળની ત્રિજ્યા છે; તો વર્તુળના મધ્ય-બિંદુથી ૬ અંતરે આવેલા એક બિંદુમાંથી દોરેલી મોટામાં મોટી અને નાનામાં નાની જ્યાની લંબાઈ કેટલી ?

૩૮. એક નિયમિત પટ્ટકોણની બાજુઓને બંને તરફ લંબાવવાથી થતી આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ પટ્ટકોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે એ સિદ્ધ કરી બતાવો.

૩૯. અવ જ્યાના છેડાનાં બિંદુઓ આગળ દોરેલી લંબ-
૩૫ જ્યાઓ અપ ને વદ બરાબર છે એ સાબીત કરો.

૪૦. વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી બે લીટીઓના છેદનબિંદુને વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જોડનારી લીટી સ્પર્શલીટીઓના સ્પર્શબિંદુઓને જોડનારી લીટીને કાટખુણે દુભાગે છે.

૪૧. એક સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા તથા તે ત્રિકોણનો પાયો એ બે આપેલાં છે; તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૪૨. એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે અને ત્રિજ્યાની લંબાઈ બ છે. અ તે વર્તુળ બહાર આવેલું એક બિંદુ છે. મને મધ્યબિંદુ લઈને ૨ બ જોડેલી ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. અને મધ્યબિંદુ લઈને અમ ત્રિજ્યાએ એક એવું બીજું વર્તુળ દોરો કે તે પહેલા વર્તુળને વ અને કમાં છેદે. મવ, મક આપેલા વર્તુળને ડ અને ફમાં છેદે છે; તો સાબીત કરો કે અડ, અફ આપેલા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.

૪૩. અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક. એક વર્તુળ એવું કાઢ્યું છે કે તે અવને વમાં સ્પર્શ કરે છે, અને તેનું મધ્ય-બિંદુ અકના લંબાવેલા ભાગમાં છે. વકને લંબાવી છે, ને તે વર્તુળને ઢમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે ઢમાં થઈને પસાર થતી વર્તુળની ત્રિજ્યા અક સાથે કાટખુણે કરે છે.

૪૪. એક સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણમાં એક બીજાને સ્પર્શ કરે એવાં ત્રણ વર્તુળો દોરો.

૪૫. એક ચોરસમાં ચાર સરખાં વર્તુળો એવાં કાઢો, કે તેમાંનું દરેક બીજાં બેને સ્પર્શ કરે.

૪૬. બે વર્તુળો એક બીજાને અ બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે. અ બિંદુમાંથી બંને વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એવી એક લીટીદોરી છે, અને તેમાં એક ટ બિંદુ લીધું છે. ટમાંથી તે વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એવી ટવ, ટવ લીટીઓ દોરી છે; તો સાબીત કરો કે ટવ = ટવ.

૪૭. અવક ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળનું મધ્ય-
ખિંદુ મ છે, અને અડ તે ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે; તો સિદ્ધ
કરો કે \angle બઅડ = \angle કઅમ.

૪૮. બે વર્તુળો એક બીજાને બ તથા કમાં છેદે છે. પ
એક વર્તુળ પરનું ચળ ખિંદુ છે. પબ, પક (જરૂર પડે તો
લંબાવવાથી) બીજા વર્તુળને દ અને રમાં મળે છે; તો સિદ્ધ
કરો કે દરની લંબાઈ નિત્ય છે.

૪૯. અવક ત્રિકોણની બક,કઅ,અબ બાજુઓનાં ડ,
ઈ,ફ એ અનુક્રમે મધ્યખિંદુઓ છે. બે અલ એ બક પર-
નો લંબ હોય, તો સાબીત કરો કે ડ,ઈ,ફ, લ ખિંદુઓ
ચક્રીય છે.

૫૦. અવક ત્રિકોણનાં બ અને ક શિરોખિંદુઓમાંથી
દોરેલા બઈ,કફ લંબો એક બીજાને હમાં છેદે છે; તો
સિદ્ધ કરો કે,

$$(૧) \angle$$
ફઅહ = \angle ફઈહ,

$$(૨) \angle$$
ફઈહ = \angle ફકબ,

(૩) બે અહ લંબાવવાથી બકને ડમાં મળતી હોય,
તો અફડક ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

(૪) અડ એ કબ પર લંબ છે.

૫૧. અવક ત્રિકોણમાં બઈ,કફ લંબો એક બીજાને હમાં
છેદે છે. તે ત્રિકોણની આસપાસ એક વર્તુળ દોર્યું છે. બઈને
લંબાવવાથી તે આ વર્તુળને ચમાં મળે છે; તો સાબીત
કરો કે ઈ એ હચનું મધ્યખિંદુ છે.

૫૨. અવક ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળનું મ એ મધ્યખિંદુ
છે, અને ત્રિકોણની એક બાજુને તથા બીજા બે બાજુઓના
લંબાવેલા ભાગોને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું ન એ મધ્યખિંદુ
છે; તો સિદ્ધ કરો કે બ,મ,ક,ન ચક્રીય ખિંદુઓ છે.

૫૩. જોનું મધ્યબિંદુ મ છે એવું એક વર્તુળ અબક ત્રિકોણની બક બાબુને બહારથી ઢ બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે, અને અબ,અકના લંબાવેલા ભાગોને ફ તથા ફમાં અનુક્રમે સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે,

$$(૧) \angle બમક = \frac{૧}{૨} \angle ફમફ = ૯૦^\circ - \frac{૧}{૨} \angle અ, \text{ અને}$$

$$(૨) ૨ અફ = ૨અફ = બક + કઅ + અબ, \text{ તેમજ}$$

$$(૩) \text{ જો અબક ત્રિકોણની અંદર કાઢેલા વર્તુળનું ન મધ્યબિંદુ હોય, તો } \angle બનક = ૯૦^\circ + \frac{૧}{૨} \angle અ.$$

૫૪. અબક ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું મ મધ્યબિંદુ છે, ને અમને લંબાવવાથી તે ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલા વર્તુળને તે પ બિંદુમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે પબ = પક = પમ.

૫૫. અ બિંદુમાંથી એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે લીટીઓ દોરી છે. એક ચળ સ્પર્શલીટી તેમને બ,કમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબક ત્રિકોણની પરિમિતિ નિત્ય છે, અને બક લીટી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સાથે જો ખુણો કરે છે તે પણ નિત્ય છે.

૫૬. અબક ત્રિકોણમાં એક વર્તુળ દોરેલું છે, અને અ તરફની બાબુએ તે વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી એક લીટી દોરી છે, તે અબ,અકને અનુક્રમે ઢ ને ફમાં મળે છે; તો સાબીત કરો કે અબક અને અઢફ ત્રિકોણોની પરિમિતિનો તફાવત બકથી બમણો છે.

૫૭. એક વર્તુળ અને એક સીધી લીટી આપેલાં છે; તો આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કાઢો કે તે બિંદુ-માંથી વર્તુળને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓનાં સ્પર્શ-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી પરિધ ઉપરના કોઈ પણ બિંદુ સાથે એક આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરે. (આ પ્રશ્નનો ઉત્તર અશક્ય ક્યારે થાય ?)

૫૮. આપેલાં અ,બ બિંદુઓમાંથી પદ લીટીને મળે એવી બે સરખી લીટીઓ એ પ્રમાણે દોરો, કે તેમની વચ્ચેનો ખુણો એક આપેલા ખુણાની બરાબર થાય.

૫૯. જો કોઈ કૌંસના અર્ધની જ્યા આખા કૌંસની જ્યા કરતાં મોટી હોય, તો તે કૌંસ આખા પરિધના કે કરતાં મોટો હોવો જોઈએ.

૬૦. એક વર્તુળની ક્ષય જ્યા અબ વ્યાસને કાટખુણે છે. ખીજી એક ચમજ જ્યા અબને મમાં છેદે છે; તો સાખીત કરો કે ક્ષઅ અથવા ક્ષબ લીટી જ્ઞક્ષમ ખુણાને દુભાગે છે.

૬૧. બે સરખાં વર્તુળોની અબ એ સામાન્ય જ્યા છે. એક વર્તુળની અક જ્યા અબ બરાબર છે અને પાછલી બાજુએ લંબાવવામાં આવે તો ખીજી વર્તુળના મધ્યબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે; તો સાખીત કરો કે અબ દરેક વર્તુળની ત્રિજ્યા બરાબર છે.

૬૨. એક વર્તુળના પરિધ ઉપર અ,બ,ક,ડ એ અનુક્રમે ચાર બિંદુઓ આવેલાં છે. અબ કૌંસ કડ કૌંસ બરાબર છે. અક ને બડ જ્યાઓ એક ખીજીને ર્માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અર્કબ ને કર્કડ ખુણાઓને દુભાગનારી જ્યા ર્ બિંદુમાં દુભાગાય છે.

૬૩. અબક એ એક વર્તુળમાં દોરેલો ત્રિકોણ છે. બઅક ખુણાને દુભાગનારી લીટી પરિધને પાછી ઢમાં મળે છે. ઢને મધ્યબિંદુ લઈને ઢક ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોર્યું છે, તે અડને ર્માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે બર્ક લીટી અબક ખુણાને દુભાગે છે.

૬૪. ઢમાંથઈને ત્રણ સરખાં વર્તુળો પસાર થાય છે. તેમાંથી બધાં એક ખીજીને છેદે છે. તેમનાં છેદનબિંદુઓ અ,બ,ક છે; તો બતાવી આપો કે ઢ એ અબક ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર* છે.

* ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબો જો બિંદુમાં મળે છે તેને 'લંબકેન્દ્ર' કહે છે.

૬૫. વર્તુળમાં દોરેલા પટકોણના સામસામા ખુણાઓની બે જોડામાંના ખુણાઓ સરખા હોય, તો ત્રીજી જોડામાંના સામસામા ખુણાઓ પણ સરખા હોય અને સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય.

૬૬. બે વર્તુળો એક બીજાને અંબમાં છેદે છે. પ અને દ બિંદુઓ એક વર્તુળના પરિધ ઉપર છે અને બીજા વર્તુળની બહાર પડે છે. પઅક, પબડ, દઅઈ, દબફ લીટીઓ બીજા વર્તુળના પરિધને ક,ડ,ઈ,ફ એ બિંદુઓમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે ઈકફ કૌંસ કફડ કૌંસની બરાબર છે.

૬૭. કોઈ ચક્રીય ચતુષ્કોણની બે સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો બીજી બે બાજુઓ સમાંતર હોવી જોઈએ.

૬૮. એક વર્તુળમાં અંબક સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, અને પ એ નાના કૌંસ બક પર આવેલું એક બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે પઅ=પબ+પક.

૬૯. અંબ એક આપેલા વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને અક તેની એક જગ્યા છે. અ અને કમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ ડમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે ડ ખુણો અંબક ખુણાથી બમણો છે.

૭૦. ક એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને અંબ તેની જગ્યા છે. અંબથી કાપી કઢાએલા મોટા કૌંસ પર પ એક બિંદુ છે. અંબને કાટખુણે દોરેલા વ્યાસને પઅ,પબ એ ડ,ઈ બિંદુઓમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે ડપઈ અને ડકઅ ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૭૧. ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ ત્રિકોણની એક એક બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલાં વર્તુળોમાંના દરેકની અંદર પડે છે.

૭૨. ચોરસના કર્ણ ઉપરના એક બિંદુમાંથી પર,દસ

લીટીઓ ચોરસની બાજુઓને સમાંતર દોરી છે. પ,વ,ર,સ બિંદુઓ ચોરસની બાજુઓ પર છે; તો તે બિંદુઓ ચક્રીય છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૩. મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, કડ વ્યાસ છે, અને કડ સાથે કાટખુણો કરનારી અબ જ્યા છે. કડમાંના કોઈ પણ બિંદુ રૂને બ સાથે સાંધી અને બરૂને લંબાવો. જો તે વર્તુળને કમાં મળતી હોય, તો સાબીત કરો કે અ,મ,રૂ,ક બિંદુઓ ચક્રીય છે.

૭૪. અબક એક ત્રિકોણ છે અને બડ,કરૂ અનુક્રમે અક,અબ પર લંબો છે; તો સિદ્ધ કરો કે અડરૂ અને અબક ત્રિકોણો પરસ્પર સમકોણ છે.

૭૫. મન લીટી અને તે લીટીની એકજ બાજુ પર અ તે બ બિંદુઓ આપેલાં છે. મનમાં એક પ બિંદુ એવું શોધી કાઢો કે પબ લીટી મન સાથે જ ખુણાઓ કરે છે તેમાંનો એક પઅ વડે દુભાગાય.

૭૬. ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને (એક અંદરથી અને એક બહારથી) સ્પર્શ કરનારાં બે વર્તુળો દોર્યા છે; તો તેમનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટીને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલું વર્તુળ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓમાં થઈને જાય છે.

૭૭. ત્રિકોણની અંદર અને તેની આસપાસ દોરેલાં બે વર્તુળો આપ્યાં છે, તેમજ ત્રિકોણને બહારથી સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ આપેલું છે; તો તે પરથી ત્રિકોણ દોરો.

૭૮. અબકડ એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. અબક ખુણાને બરૂ દુભાગે છે અને વર્તુળના પરિધને રૂ બિંદુમાં મળે છે. અડ ને ક સુધી લંબાવી છે; તો સિદ્ધ કરો કે ડરૂ એ કડક ખુણાને દુભાગે છે.

૭૯. બે વર્તુળો એક બીજાને અ અને બમાં છેદે છે, અને પઅપ, દબદ એ સમાંતર લીટીઓ વર્તુળોને પ,પ' અને

દ,દમાં મળે છે; તો ખતાવી આપો કે પદ અને પદ બરોબર છે.

૮૦. બે વર્તુળો એક બીજાને બ અને ઢમાં છેદે છે. અબક લીટી વર્તુળોને અ,બ,કમાં છેદે છે. અડ,કડ વર્તુળોને પ અને દમાં છેદે છે. અદ ને કપ એ રમાં મળે છે, તો સિદ્ધ કરો કે ડપદર ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

૮૧. એક ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓને લંબાવવાથી તેઓ પ અને દમાં મળે છે, અને ચતુષ્કોણની બહાર એ પ્રમાણે બનેલા ત્રિકોણોની આસપાસ વર્તુળો દોરવામાં આવ્યાં છે, જેઓ એક બીજાને રમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે પ,ર,ને દ બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

૮૨. જો કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરોબર હોય, તો સિદ્ધ કરો કે બાજુઓને દુભાગનાર લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૮૩. બે આપેલાં વર્તુળોનાં અ,બ બે છેદનબિંદુઓ છે. બમાં થઈ જતી અને બંને વર્તુળોના પરિઘને મળનારી કબડ લીટી એવી રીતે કાઢો કે અકડ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મોટામાં મોટું થાય.

૮૪. જો કોઈ વર્તુળની બે જ્યાઓ એક બીજાને કાટખુણે હોય, તો સિદ્ધ કરો કે જ્યાઓના ચારે ભાગો પરના ચોરસોનો સરવાળો વ્યાસ પરના ચોરસની બરોબર હોય છે.

૮૫. આપેલા વર્તુળના અ મધ્યબિંદુમાંથી અબ અને અક એ બે લીટીઓ દોરી છે; તો જેનો અબ અને અક વચ્ચે આવેલો ભાગ આપેલી લંબાઈનો થાય એવી એક સ્પર્શલીટી કેવી રીતે દોરશો તે શોધી કાઢો.

૮૬. પચર સમબાજુ ત્રિકોણની ચર બાજુ સ સુધી એવી રીતે લંબાવી છે કે રસ=ચર છે; તો સાબીત કરો કે પસ^૨=૩પર^૨.

૮૭. અ બિંદુમાંથી એક વર્તુળને સ્પર્શ કરે એવી બે અચળ લીટીઓ દોરી છે, અને તેમને મળનારી તેજ વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી એક ત્રીજી ચળ લીટી દોરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબક ત્રિકોણની પરિમિતિ નિત્ય છે, અને બક મધ્ય-બિંદુ સાથે જે ખુણો કરે છે તે પણ નિત્ય છે.

૮૮. અબકડ વર્તુળનું દ એ મધ્યબિંદુ છે અને અબ તથા કડ જ્યાંઓ એક બીજીને પ બિંદુ આગળ કાટખુણે છેદે છે. અક અને દપ લીટીનાં મ અને ન એ મધ્યબિંદુઓ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $૨(મન^2 + તન^2) = દઅ^2$.

૮૯. વર્તુળની જે જ્યાંઓ એક અચળ બિંદુ સાથે કાટ-ખુણો કરતી હોય તેનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન વર્તુળ હોય છે.

૯૦. અ,બ,ક,ડ એ ચાર બિંદુઓ એક સીધી લીટીમાં નથી; તો બતાવી આપો કે આ બિંદુઓથી જેનો પરિધિ સરખે અંતરે હોય એવું વર્તુળ કાઢી શકાશે.

૯૧. એક વર્તુળ અબક ત્રિકોણની બક બાબુને ઢમાં અને લંબાવેલી અબ,અકને ઈ તથા ફમાં સ્પર્શ કરે છે. ત્રિકોણની અંદર દોરેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો સાબીત કરો કે મઅઈ અને મઅફ એ બે ત્રિકોણોનો સરવાળો અબક ત્રિકોણની બરાબર છે.

૯૨. અબકડ એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, અને કક્ષબ તથા કક્ષડ વર્તુળો એક બીજીને ક્ષ બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે ક્ષ બિંદુ એક અચળ વર્તુળ ઉપર છે.

૯૩. બે સરખાં વર્તુળો એક બીજીને અમાં સ્પર્શ કરે છે. તેમની ત્રિજ્યાઓથી બમણી ત્રિજ્યાવાળું એક ત્રીજું વર્તુળ સરખાં વર્તુળોમાંના એકને અંદરથી બમાં સ્પર્શ કરે છે અને બીજીને પ અને દમાં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબ લીટી પ કિંવા દમાં થઈને જાય છે.

૯૪. અવક ત્રિકોણનો ક ખુણો સાંકડો છે. બડ એ અક ઉપર લંબ છે. હઅનો અથવા હઅને લંબાવી તેનો હપ ભાગ હક બરોબર કાપી કાઢો. તેમજ બઅનો અથવા બઅને લંબાવી તેનો બદ ભાગ બક બરોબર કાપી કાઢો. પદ સાંધો, અને સિદ્ધ કરો કે $\angle પદઅ = \angle ક + \frac{1}{2} \angle બ$.

૯૫. બડ લીટીનું ક એ મધ્યબિંદુ છે અને બડ પર કમ લંબ દોરેલો છે. કમમાં એક ર્દ બિંદુ લો. હર્દ સાંધો અને હર્દને અ સુધી લંબાવો. બ, ર્દ, અમાં થઈને જાય એવું વર્તુળ દોરો, અને તેને કમ ને બીજા એક ફ બિંદુમાં છેદવા દો. સાબીત કરો કે ફ એ અર્દબ કૉંસનું મધ્યબિંદુ છે.

૯૬. ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓને મળતાં સુધી લંબાવવાથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજા પર લંબ હોય છે.

૯૭. વર્તુળની બહાર એક ક બિંદુ આપેલું છે. વર્તુળને પ,ચમાં છેદનારી કપચ લીટી એવી કાઢો કે કચ લીટી પ આગળ દુભાગાય. (આમ ક્યારે ન બની શકે ?)

૯૮. આપેલાં બે બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતું એક એવું વર્તુળ દોરો કે એક આપેલી લીટીનો જે ભાગ એ વર્તુળમાં પડે તે આપેલી લંબાઈનો હોય.

૯૯. વર્તુળના પરિઘ ઉપરના એક આપેલા બિંદુમાંથી એક બીજાને કાટખુણે બે એવી જ્યાઓ દોરો કે વર્તુળના મધ્યબિંદુથી એકનું અંતર તેજ મધ્યબિંદુથી બીજાના અંતર કરતાં બમણું થાય.

૧૦૦. એક એવું વર્તુળ કાઢો કે જેનું મધ્યબિંદુ એક આપેલું બિંદુ થાય, અને જેનો વ્યાસ આપેલા એક બીજા બિંદુમાંથી દોરેલી તે વર્તુળને સ્પર્શ કરનારી લીટીની બરોબર થાય.

૧૦૧. એક વર્તુળમાં દોરેલા અઘકડ ચતુષ્કોણના અ અને હ ખુણાઓમાંનો દરેક અર્ધા કાટખુણા બરોબર છે. બમાંથી અહ પર દોરેલા લંબને લંબાવતાં તે વર્તુળને ર્માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે કઈ એ વર્તુળનો વ્યાસ છે અને અમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીને સમાંતર છે.

૧૦૨. અબ પર અને તેની એકજ બાજુએ બે વર્તુળખંડો એવા દોરેલા છે કે બહારના કૌંસ પરના ક બિંદુમાંથી દોરેલી કઅ,કબ બ્યાઓ અંદરના કૌંસને હ અને ર્માં છેદે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કની સ્થિતિ ગમે ત્યાં હોય, તો પણ હરે બ્યાની લંબાઈ નિત્ય છે.

૧૦૩. અઘક ત્રિકોણનો અબ પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો ક ખુણો આપેલાં છે. અ અને બમાંથી બક અને કઅ પર દોરેલા લંબો એ બાજુઓને અનુક્રમે હ અને ર્માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કઈડ વર્તુળના મધ્યબિંદુનું હરેથી અંતર નિત્ય છે.

૧૦૪. અબપ અને અઘકડ બે વર્તુળો છે. મ એ પહેલા વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે અને પ તેના પરિધ પરનું એક બિંદુ છે, અક,વહ, બીજા વર્તુળની પમાં થઈને પસાર થતી બ્યાઓ છે; તો બતાવી આપો કે મપ એ કડને કાટખુણે છે.

૧૦૫. બે વર્તુળોનું અ એક છેદનબિંદુ છે. બ અને ક બે વર્તુળો પર અનુક્રમે આવેલાં બે અચળ બિંદુઓ છે. અમાં થઈ જાય એવી રીતે દોરેલી પઅદ લીટી વર્તુળોને પ ને દમાં મળે છે; તો પબ ને દકના છેદનબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૦૬. અહબ વર્તુળનું ક એ મધ્યબિંદુ છે, અને અ,બ વર્તુળ ઉપરનાં બે બિંદુઓ છે. અ,ક,બમાં થઈને પસાર થતો એક કૌંસ દોર્યો છે. અપદ લીટી આ કૌંસને પમાં અને અહબ કૌંસને દમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે પબ=પદ.

૧૦૭. એક સમખાણુ ચતુષ્કોણુ એવો કાઢો કે તેની બે ખાણુઓ બે સમાંતર લીટીઓ પર પડે અને બે બીજી ખાણુઓ બે સ્થિર બિંદુઓમાં થઈને જાય. (આ પ્રશ્નના કેટલા ઉત્તર સંભવે ?)

૧૦૮. મ એક વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે, અને તેમાં અબ એક આપેલી જ્યા છે. પ આપેલા વર્તુળમાં એક બિંદુ છે. પમાંથી વર્તુળને ક,ડમાં છેદનારી એક એવી લીટી દોરો કે કડ લીટી અબ વડે દુભાગાય. (અબથી પ અને મનાં અંતરોનો સરવાળો મપ કરતાં ઓછો હોય તો બે ઉત્તર સંભવે છે, અને જો એ સરવાળો મપ કરતાં વધારે હોય તો એક પણ ઉત્તર સંભવતો નથી એમ સાબીત કરો.)

૧૦૯. એક બીજને છેદનારાં બે વર્તુળો આપ્યાં છે. ગમે તે એક છેદનબિંદુમાંથી બે વર્તુળોના પરિધોને મળે એવી આપેલી લંબાઈની એક લીટી દોરો.

૧૧૦. અબક ત્રિકોણમાં દોરેલું વર્તુળ બક ને ડ બિંદુ-માં સ્પર્શ કરે છે; તો બતાવી આપો કે બઅડ ને કઅડ ત્રિકોણોમાં દોરેલાં વર્તુળો એક બીજને સ્પર્શ કરે છે.

૧૧૧. અબકડ ચતુષ્કોણના બ ને ડ ખુણાઓ કાટખુણા છે; તો સિદ્ધ કરો કે બઅક ને ડઅક ખુણાઓનો તક્ષવત બકઅ ને ડકઅ ખુણાઓના તક્ષવત બરોબર છે. જો કણો વચ્ચેનો ખુણો 60° નો હોય, તો આ તક્ષવત કેટલો હોય ?

૧૧૨. ત્રિકોણની બે ખાણુઓ આપેલી છે, ને તેમના પરના ચોરસોનો સરવાળો ત્રીજી ખાણુ પરના ચોરસથી ત્રણગણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૧૩. અબક ત્રિકોણની અબ ખાણુ પર દોરેલો વર્તુળ-ખંડ બક તથા કઅને (જરૂર પડે તો લંબાવવાથી) પ તથા ઢમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે પઢ એક સ્થિર સીધી લીટીને સમાંતર છે.

૧૧૪. અવકડ ચોરસ દોરો. અબમાં એક ર્દ બિંદુ લો. ર્દક.ર્દ : સાધો. અબમાં એક ફ બિંદુ એવું લીધું છે કે અફ=ર્વર્દ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અવ.ર્દફ કાટખુણ ચોખુણ ર્દક ને ર્દડ ઉપરના ચોરસોના તદ્વાવત યરોચર છે.

૧૧૫. જો કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસની યરોચર હોય, તો સાબીત કરો કે પહેલી બે બાજુઓમાંની નાની બાજુ ત્રીજી બાજુ પર લંબ છે.

૧૧૬. અવક ત્રિકોણનો ક ખુણો કાટખુણો છે. અવ પર કડ લંબ દોરો. કબમાંથી બડ યરોચર કર્દ ભાગ કાપી કાઢો. કઅમાંથી અડ યરોચર કફ ભાગ કાપી કાઢો. હવે સિદ્ધ કરો કે અર્દ=ર્વફ.

૧૧૭. અવકના શિરોબિંદુ અમાંથી વકને લંબાવીને તેના પર એક લંબ દોર્યો છે. તે લંબ વકને ડમાં મળે છે. કડ=વક છે; તો બતાવી આપો કે અવ અને અકના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણ ચોખુણ ૩ વક^૨ યરોચર છે.

૧૧૮. એક લીટીના એવા બે ભાગ કરો કે એક ભાગ પરનો ચોરસ બીજા ભાગ પરના ચોરસથી ત્રણગણો થાય.

૧૧૯. અવક ત્રિકોણમાંના ઓ બિંદુમાંથી વક,કઅ, ને અવ પર અનુક્રમે ઓડ, ઓર્દ, ને ઓફ લંબો દોર્યા છે; તો સિદ્ધ કરો કે બડ, કર્દ, ને અફ પરના ચોરસોના સરવાળો કડ, અર્દ, ને વફ પરના ચોરસોના સરવાળા યરોચર છે.

૧૨૦. અવક સમઢિબાજુ ત્રિકોણના અક પાયામાં એક મ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અમ.મક=અવ^૨-મવ^૨.

૧૨૧. અવના હ બિંદુમાં એવા બે ભાગ પડે છે કે અહ પરનો અફગહ ચોરસ અવ.હવની યરોચર છે; તો

ખતાવી આપો કે અહનું મધ્યખિંદુ ફ,ગ,વ એ ખિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૧૨૨. ત્રિકોણની જે બે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર હોય, તે બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસ કરતાં તે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના ચારગણા જેટલો વધારે હોય છે.

૧૨૩. અબક ત્રિકોણમાં અવ=અક છે. વક ને ડ સુધી લંબાવીને અ,ડ સાધ્યાં છે; તો સાબીત કરો કે $અડ^2 = અવ^2 + વડ \cdot ડક$.

૧૨૪. અવકડ ચોરસના અક કર્ણને $\frac{1}{2}$ સુધી લંબાવીને કઈ=વક કરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે $વઈ^2 = અક \cdot અઈ$.

૧૨૫. અબક ત્રિકોણમાં $\angle અ = 120^\circ$ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $વક^2 = અવ^2 + અક^2 + અવ \cdot અક$.

૧૨૬. અકવ સીધી લીટીના અક ભાગ પર અકડ એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે; તો સિદ્ધ કરો કે $ડવ^2 = અક^2 + કવ^2 + અક \cdot કવ$.

૧૨૭. અબક ત્રિકોણનો $\angle ક$ પહોળો ખુણો છે. અ અને વમાંથી સામેની બાજુઓ પર દોરેલા લંબો તેમને ડ તથા $\frac{1}{2}$ ખિંદુઓમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $અવ^2 = વક \cdot વડ + અક \cdot અઈ$.

૧૨૮. અડઈવ વર્તુળનું ક મધ્યખિંદુ છે અને અવ વ્યાસ છે. ડઈ જ્યાં અવને સમાંતર છે. અડ સાંધો અને અડ પર ઈડના લંબાવેલા ભાગને પમાં મળે એવો અપ લંબ દોરો. પક,અઈ સાંધો. હવે સિદ્ધ કરો કે $પક^2 = અપ^2 + અક^2 + અઈ^2$.

૧૨૯. ત્રિકોણની બે બાજુના સરવાળા તથા બાહ્યાક્રીથી થતો કાટખુણુ ચોખુણુ, શિરોખિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબનું પાયાના મધ્યખિંદુથી અંતર અને પાયો એ બેથી થતા

કાટખુણુ ચોખુણુથી બનણો હોય છે.

૧૩૦. અબક ત્રિકોણનો \angle ક કાટખુણો છે. અકમાંના એક ઢ બિંદુમાંથી અબ પર ઢેઈ લંબ દોર્યો છે; તો બતાવી આપો કે કઅ·અડ=અબ·અઈ.

૧૩૧. અબક ત્રિકોણની અબ ને અક બાજુઓ પર બહારની બાજુએ અબઢેઈ ને અકફગ ચોરસો દોર્યા છે; તો સિદ્ધ કરો કે $ઈગ^2 + બક^2 = ૨(અબ^2 + અક^2)$.

૧૩૨. અબકડ ચતુષ્કોણનો \angle બ કાટખુણો છે, અને અડ^૨ + ૨અવ·કડ = અબ^૨ + બક^૨ + કડ^૨ છે; તો સિદ્ધ કરો કે \angle બકડ કાટખુણો છે.

૧૩૩. ત્રિકોણની બાજુઓ પર બહારની બાજુએ ચોરસો દોર્યા છે, અને તે ચોરસોના પાસપાસેના ખુણાઓ સાંધનારી ત્રણ લીટીઓ દોરી છે; તો સિદ્ધ કરો કે આ લીટીઓ પરના ચોરસોના સરવાળો તે ત્રિકોણની બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળાથી ત્રણગણો છે.

૧૩૪. અબક ત્રિકોણમાં બક, કઅ, અબ પર અતુકમે અડ,બઈ,કફ લંબો દોરેલા છે; તો સિદ્ધ કરો કે અબ·અફ અને કબ·કડ એ બે વચ્ચેનો તફાવત અક^૨ બરાબર છે.

૧૩૫. જો કોઈ ચતુષ્કોણની પહેલી અને ત્રીજી બાજુઓ પરના ચોરસોનો સરવાળો બીજી અને ચોથી બાજુઓ પરના ચોરસોના સરવાળા બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે છેદતા હોવા જોઈએ.

૧૩૬. એક સાંકડાખુણુ ત્રિકોણની બાજુઓ પર બહારની બાજુએ ચોરસો દોર્યા છે. ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ પર લંબો દોર્યા છે, અને તેમને લંબાવીને દરેક ચોરસના બાજુએ ભાગ પાડ્યા છે. હવે બતાવી આપો કે દરેક ચોરસ બીજા બે ચોરસોમાંના પોતાની પાસેના બાજોના સરવાળા બરાબર છે.

૧૩૭. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં અક = કઢ અને અડ = વક છે. \angle અકવ \angle અડકનો ન્યૂનતાપૂરક છે; તો સિદ્ધ કરો કે $અવ^2 = વક^2 + કઢ^2 + ડઅ^2$.

૧૩૮. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણનો પાયો ૪" છે અને સરખી બાજીઓમાંની દરેક ૭" છે; તો પાયાના છેડાથી ગુરુત્વ-કેન્દ્ર એટલે મધ્યગાઓનું છેદનબિંદુ કેટલે અંતરે છે તે શોધી કાઢો.

૧૩૯. અ ને વ બે અચળ બિંદુઓ છે, અને કઢ એક આપેલી લીટી છે. કઢમાં એક પ બિંદુ એવું શોધી કાઢો કે $(પઅ^2 + પવ^2)$ એ સરવાળો નાનામાં નાનો થાય.

૧૪૦. એક આપેલા વર્તુળનું અ મધ્યબિંદુ છે અને વક વ્યાસ છે. ક આગળની કઢ સ્પર્શલીટી કઞની બરોબર છે. વ, ડ સાંધો અને વડ પર અઈ લંબ દોરો. ક, ઈ સાંધો અને કઈને લંબાવી તેને પરિઘને ફમાં મળવા દો. વફ સાંધો. હવે સિદ્ધ કરો કે $વફ = ફઈ$.

૧૪૧. અવકઢ ચોરસના અ બિંદુમાંથી દોરેલી એક લીટી લંબાવેલી કવ, કઢ, ડવને ઈ, ફ, દમાં અનુક્રમે મળે છે; તો બતાવી આપો કે ક, ઈ, ફમાં થઈને પસાર થતા વર્તુળને કદ સ્પર્શ કરે છે.

૧૪૨. અવના ક બિંદુમાં બે ભાગ પાડ્યા છે. અવડઈ એ અવ પરનો ચોરસ છે. કમાંથી વડને સમાંતર દોરેલી લીટી વઈને ફમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $ઈવ.વફ = ૨ અવ. વક$.

૧૪૩. સમબાજી ચતુષ્કોણની એક બાજીની લંબાઈ તથા સ્થાન આપ્યાં છે; તો તે સમબાજી ચતુષ્કોણના કર્ણોનાં છેદનબિંદુનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૪. આપેલા વર્તુળમાં એક આપેલા બિંદુમાં થઈને પસાર થતી બધાઓનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૫. (વર્તુળ બહાર) આપેલા એક ગિંદુમાંથી સમકેન્દ્ર વર્તુળોને સ્પર્શ કરે એમ દોરેલી લીટીઓનાં સ્પર્શગિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૬. અબ એક આપેલા વર્તુળની જ્યા છે, અને ૫ પરિધ પરનું કોઈ પણ ગિંદુ છે. અક, બડ અનુક્રમે બગ, અપ પરના લંબો છે; તો કડનાં મધ્યગિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

૧૪૭. કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાઢેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા, અને કર્ણ તથા ખીજી બે બાજુઓના લંબાવેલા ભાગને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળની ત્રિજ્યા, એ બેના તફાવત બરોબર હોય છે.

૧૪૮. ત્રણ વર્તુળો એક ખીજીને બહારથી સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે બધાં વર્તુળોનાં સ્પર્શગિંદુઓમાંથી દોરેલી સામાન્ય સ્પર્શલીટીઓ એક ગિંદુમાં મળે છે અને સરખી છે.

૧૪૯. ત્રણ વર્તુળો બહારથી એક ખીજીને સ્પર્શ કરે છે; તો સિદ્ધ કરો કે તે વર્તુળોનાં મધ્યગિંદુઓને જોડવાથી થતા ત્રિકોણમાં દોરેલું વર્તુળ અને વર્તુળોનાં સ્પર્શગિંદુઓને જોડવાથી થતા ત્રિકોણની આસપાસ દોરેલું વર્તુળ એ બંને એકજ છે.

૧૫૦. એક વર્તુળનું મ મધ્યગિંદુ છે અને અબ જ્યા છે. અબમાંના કોઈ પણ ક ગિંદુમાંથી અબ પર કડ લંબ દોર્યો છે, ને તે વર્તુળને ડમાં મળે છે. તો સિદ્ધ કરો કે \angle અડક = \angle મડબ.

૧૫૧. (૧) વર્તુળના વ્યાસના છેડાનાં ગિંદુઓમાંથી વ્યાસને ન છેદતી હોય એવી જ્યા પર દોરેલા લંબો જ્યાને વર્તુળની બહારજ મળે છે, અને (૨) તે જ્યાના વર્તુળની બહારના ભાગો સરખા હોય છે.

૧૫૨. વર્તુળમાં નિયમિત ષટ્કોણ કાઢ્યો હોય, તો તે ષટ્કોણની બહારના વર્તુળખંડોમાંના ખુણા કેવડો હોય ?

વર્તુળની અંદર કાઢેલી નિયમિત આકૃતિ ચોરસ, સમઘાળુ ત્રિકોણ, અથવા નિયમિત અષ્ટકોણ.....હોય, તો આકૃતિની બહારના વર્તુળખંડોમાંનો ખુણો કેવડો હોય ?

૧૫૩. મ એ અબક ત્રિકોણમાં દોરેલા વર્તુળનું મધ્યખિંદુ છે. બકને તથા લંબાવેલી અબ, અકને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળનું મધ્યખિંદુ ન છે; તો બતાવી આપો કે ક,મ,વ,ન એ ખિંદુઓ ચક્રીય છે.

૧૫૪. કાટખુણુ ત્રિકોણના કર્ણમાંથી બીજી બે બાજુઓ જેવડા ભાગો કાપી કાઢવામાં આવે, તો છેદનખિંદુઓ વચ્ચે આવેલા કર્ણના ભાગ પરનો ચોરસ તે લીટીના બાકીના ભાગોથી થતા કાટખુણાનો બમણો હોય છે.

૧૫૫. ત્રિકોણના એક શિરોખિંદુમાંથી પાયા પર જે લંબ દોરવામાં આવે, તો તે પાયાના જે બે ભાગો પડે તેના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતો કાટખુણુ ચોખુણુ તે ત્રિકોણની બે બાજુઓના સરવાળા તથા બાદબાકીથી થતા કાટખુણુ ચોખુણુની બરાબર હોય છે.

૧૫૬. અબક કાટખુણુ ત્રિકોણની અબ,બક,કઅ બાજુઓ પર અનુક્રમે અબડઈ, બકફમ, અકહચ ચોરસો દોરેલા છે; તો $ચઈ^2 + ડમ^2 + ફહ^2 = ૩(અબ^2 + બક^2 + કઅ^2)$.

૧૫૭. અબ બ્યાના છેડાનાં ખિંદુઓ આગળ અકને બંદી લીટીઓ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે. અકના કોઈ પણ ક ખિંદુમાંથી બંદીને સમાંતર એક લીટી દોરી છે તે અબને અથવા અબના લંબાવેલા ભાગને ડમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે કઅ=કડ.

૧૫૮. એક લીટી એક વર્તુળને પ અને દમાં અને બીજી વર્તુળને ર અને સમાં છેદે છે. પ અને રમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય, તો સિદ્ધ કરો કે

દ અને સ્ત્રમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ પણ એક બીજીને સમાંતર છે.

૧૫૯. બે વર્તુળોનું **અ** એક છેદનબિંદુ છે. અમાં થઈને જતી એક પઅદ લીટી દોરી છે તે બંને વર્તુળોને **પ** અને **દ**માં છેદે છે. **પ** અને **દ**માંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ એક બીજીને **ર**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **પરદ** ખુણા અમાંથી દોરેલી સ્પર્શલીટીઓ વચ્ચેના ખુણાની બરોબર છે.

૧૬૦. આપેલા ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુને શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, પાયાને સમાંતર દોરેલી લીટીઓનો જે ભાગ તે ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ વચ્ચે પડતો હોય તેનાં મધ્યબિંદુઓનું નિધાન છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૬૧. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણો બનાવો:—

- (૧) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને પાયાના ગમે તે છેડાના બિંદુથી દોરેલી સામી બાજુ પરની મધ્યગા.
- (૨) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો; અને તે ખુણાને દુભાગનારી લીટી જે બિંદુમાં પાયાને છેદે છે તે બિંદુ.
- (૩) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો.
- (૪) પાયો, શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો, અને બીજી બે બાજુઓનો તફાવત.

૧૬૨. જેનો પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો એ બે આધ્યાં હોય એવા ત્રિકોણોમાં કયા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સૌથી વધારે હોય ?

૧૬૩. જે ત્રિકોણનો પાયો અને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો આધ્યાં હોય એવા ત્રિકોણોમાં દોરેલાં વર્તુળોનાં મધ્ય-બિંદુઓનું નિધાન શોધી કાઢો.

